

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Кубанский государственный университет»

Задания открытой многопрофильной олимпиады
Кубанского государственного университета
для школьников по профилю «Математика».

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Краснодар
2021

1. [10 баллов] Решите неравенство:

$$\frac{|x-2|-|x|}{\sqrt{x^3+8}} \geq 0.$$

2. [10 баллов] Решите уравнение:

$$\sin 4x = \cos 6x.$$

3. [10 баллов] Решите систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^y = 2^{y+1}, \\ x^{y^2} = 64. \end{cases}$$

4. [10 баллов] Решите неравенство:

$$2,5^{\log_2 x^4 + 4} \leq 0,4^{\log_2(-\frac{2}{x}) \cdot \log_2(-2x)}.$$

5. [15 баллов] Высоты AM и BN остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке K , причём середина высоты AM находится на окружности, построенной на стороне BC как на диаметре.

а) Докажите, что $MK : AK = 1 : 3$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если ещё известно, что $AM = 4$ и $BN = 2\sqrt{3}$.

6. [15 баллов] На боковом ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена отличная от A и A_1 точка K .

а) Докажите, что тангенс угла между прямой AD и прямой пересечения плоскостей ABC и B_1KD равен $\frac{AK}{KA_1}$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и B_1KD , если ещё известно, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AA_1}{AB} = \frac{3}{2}$.

7. [15 баллов] Найдите все значения a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} |x-4|(x-6) \geq 0, \\ x^2 - a^2 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. [15 баллов]

Если $f(2x+1) = e^x$, $f(g(x)) = x^2$, то какова функция $g(x)$?

Указания и решения.

1. [10 баллов] Решите неравенство:

$$\frac{|x-2|-|x|}{\sqrt{x^3+8}} \geq 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0, \\ |x-2|-|x| \geq 0. \end{cases}$$

Умножим обе части второго неравенства на положительную величину $|x-2|+|x|$.

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0, \\ |x-2|-|x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > -8, \\ (x-2)^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-2; 1]$.

2. [10 баллов]

Решите уравнение:

$$\sin 4x = \cos 6x.$$

Решение. Воспользуемся формулой приведения $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$.

$$\cos 6x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 0;$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Значит,

$$\begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, k, m \in \mathbf{Z}$.

3. [10 баллов] Решите систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^y = 2^{y+1}, \\ x^{y^2} = 64. \end{cases}$$

Решение. Осуществим логарифмирование обеих частей обоих равенств по основанию 2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0, \\ x^y = 2^{y+1}, \\ x^{y^2} = 64 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \log_2 x = y + 1, \\ y^2 \log_2 x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x = \frac{y+1}{y}, y \neq 0, \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}, \\ y = -3, \\ x = 2\sqrt{2}, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(\sqrt[3]{4}; -3), (2\sqrt{2}, 2)$.

4. [10 баллов] Решите неравенство:

$$2,5^{\log_2 x^4 + 4} \leq 0,4^{\log_2 \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot \log_2 (-2x)}.$$

Решение. Приведём обе части неравенства к одному основанию:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 x^4 + 4} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{-\log_2 \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot \log_2 (-2x)}.$$

Так как основание степени $\frac{5}{2} > 1$, то имеем

$$\log_2 x^4 + 4 \leq -\log_2 \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot \log_2 (-2x);$$

$$\log_2 x^4 + 4 \leq -(1 - \log_2 (-x)) \cdot (1 + \log_2 (-x)).$$

Функция $f(x) = \log_2 (-x)$ определена при $x < 0$; значит, $\log_2 x^4 = 4 \log_2 (-x)$. Полагая $t = \log_2 (-x)$, приходим к неравенству $t^2 - 4t - 5 \geq 0$, откуда следует, что $t \leq -1$ или $t \geq 5$.

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ \log_2(-x) \leq -1, \\ \log_2(-x) \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ \log_2(-x) \leq \log_2 \frac{1}{2}, \\ \log_2(-x) \geq \log_2 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ -x \leq \frac{1}{2}, \\ -x \geq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ x \leq -32. \end{cases}$$

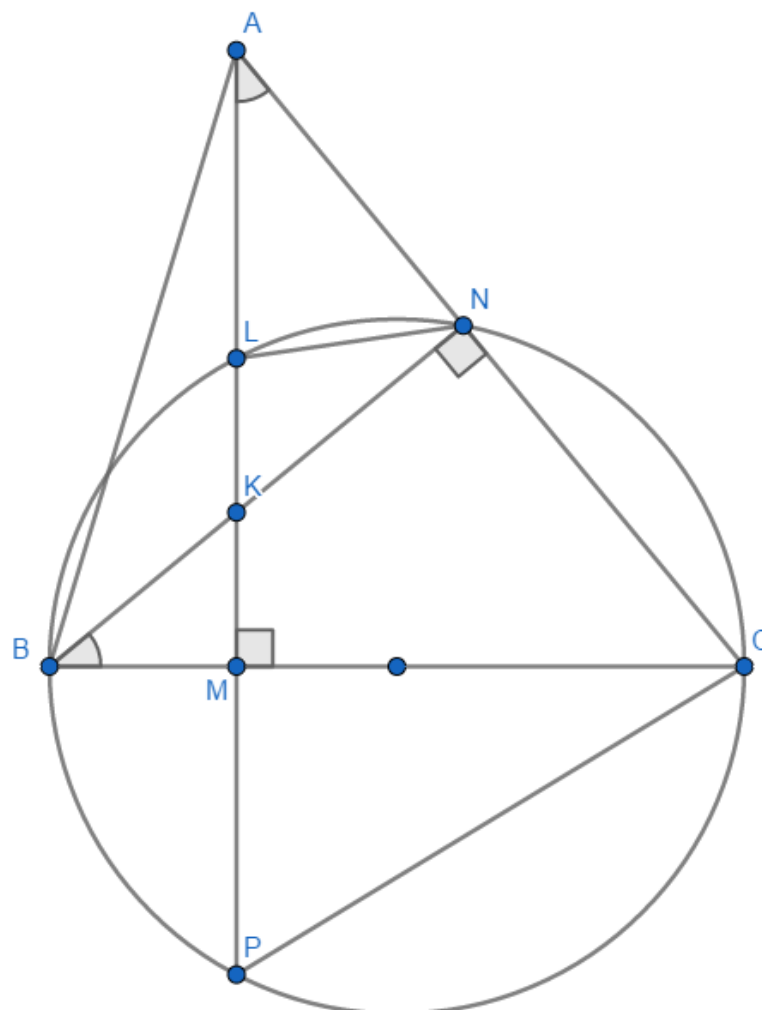
Ответ: $(-\infty, -32] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

5. [15 баллов] Высоты AM и BN остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке K , причём середина высоты AM находится на окружности, построенной на стороне BC как на диаметре.

а) Докажите, что $MK : AK = 1 : 3$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если ещё известно, что $AM = 4$ и $BN = 2\sqrt{3}$.

Решение.



Пусть L – середина высоты AM и P – вторая точка пересечения луча AL с окружностью. Ясно, что в силу $\angle BNC = 90^\circ$ точка N тоже находится на окружности. Положим $AL = LM = x$, $AK = y$ и $\angle CAM = \alpha$. Так как диаметр BC перпендикулярен к хорде LP , то он делит её пополам и поэтому $MP = x$. Из прямоугольных треугольников ANK и AMC находим, что $AN = y \cos \alpha$ и $AC = \frac{2x}{\cos \alpha}$.

а) Замечаем, что $\angle LAN = \angle CAP$ и также $\angle ALN = \angle ACP$ (дополняют один и тот же угол PLN до 180°), поэтому треугольники ALN и ACP подобны. Откуда $\frac{AL}{AC} = \frac{AN}{AP}$, то есть $\frac{x}{\frac{2x}{\cos \alpha}} = \frac{y \cos \alpha}{3x}$ и $y = \frac{3x}{2}$. Следовательно, $MK = 2x - y = \frac{x}{2}$, а значит в силу $AK = \frac{3x}{2}$ окончательно доказываем, что $MK : AK = 1 : 3$.

б) Из $AM = 2x = 4$ имеем $x = 2$, поэтому $MK = \frac{x}{2} = 1$ и $AK = \frac{3x}{2} = 3$. Треугольники KAN и KBM подобны по двум углам (вертикальные углы AKN и BKM , а также прямые углы ANK и BMK), значит в силу $\angle KAN = \alpha$, имеем $\angle KBM = \alpha$. Откуда находим $KN = AK \sin \angle KAN = 3 \sin \alpha$ и $BK = \frac{MK}{\sin \angle KBM} = \frac{1}{\sin \alpha}$. Ввиду того, что $BN = 2\sqrt{3}$, приходим к следующему равенству $3 \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = 2\sqrt{3}$, то есть $3 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 1 = 0$ и $(\sqrt{3} \sin \alpha - 1)^2 = 0$. Таким образом, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Так как $AC = \frac{2x}{\cos \alpha}$, то получаем $AC = \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{6}$. Окончательно находим, что площадь треугольника ABC равна $\frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}$.

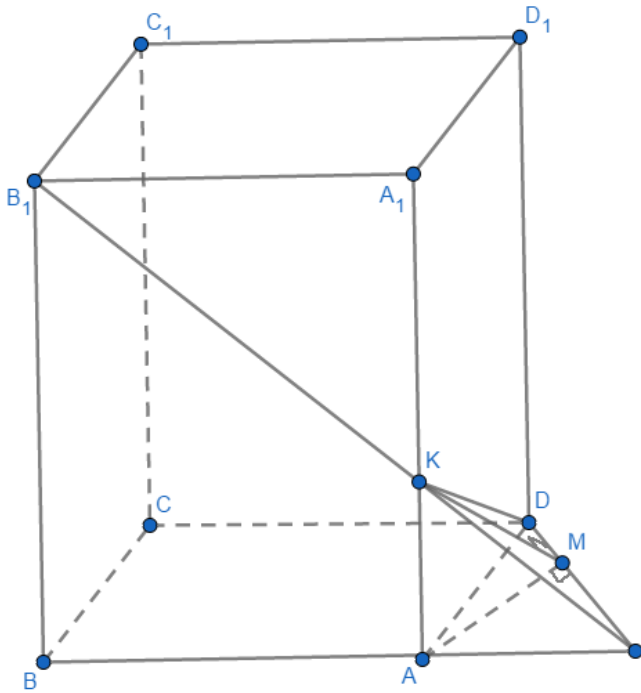
Ответ: б) $6\sqrt{2}$.

6. [15 баллов] На боковом ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена отличная от A и A_1 точка K .

а) Докажите, что тангенс угла между прямой AD и прямой пересечения плоскостей ABC и B_1KD равен $\frac{AK}{KA_1}$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и B_1KD , если ещё известно, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AA_1}{AB} = \frac{3}{2}$.

Решение.



Пусть прямая B_1K в плоскости ABB_1 пересекает прямую AB в точке L . Так как точка L принадлежит плоскостям ABC и B_1KD , то она лежит на линии пересечения этих плоскостей. Точка D тоже лежит на линии пересечения этих же плоскостей, а значит DL – прямая пересечения плоскостей ABC и B_1KD . Положим $AB = a$, $KA_1 = b$, $\frac{AK}{KA_1} = k$ и $\angle ADL = \alpha$.

а) Нам в наших обозначениях надо доказать, что $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Имеем $AA_1 = AK + KA_1 = bk + b$.

Треугольники LBB_1 и LAK подобны в силу $BB_1 \parallel AK$, коэффициент их подобия равен $\frac{BB_1}{AK} = \frac{AA_1}{AK} = \frac{bk+b}{bk} = \frac{k+1}{k}$. Тогда с одной стороны $LB = \frac{k+1}{k} \cdot LA$, а с другой стороны $LB = LA + a$. Откуда следует $\frac{k+1}{k} \cdot LA = LA + a$ и поэтому $LA = ka$. Из прямоугольного треугольника ADL ($\angle LAD = 90^\circ$) находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{LA}{AD} = \frac{ka}{a} = k$, что и доказывает требуемое в пункте а).

б) По условию $\frac{2}{3} = \frac{AK}{KA_1} = k$, а также $\frac{3}{2} = \frac{AA_1}{AB} = \frac{bk+b}{a} = \frac{5b}{3a}$, то есть $KA_1 = b = 0,9a$. Поэтому $AK = \frac{2}{3} \cdot KA_1 = 0,6a$.

Рассмотрим пирамиду $KADL$, у которой боковое ребро AK перпендикулярно плоскости основания ADL , $\angle LAD = 90^\circ$, а также $AD = AB = a$, $LA = ka = \frac{2}{3}a$, и $AK = 0,6a$. Искомый угол φ между плоскостями ABC и B_1KD равен углу между основанием ADL и боковой гранью KLD пирамиды $KADL$.

Пусть AM – высота треугольника ADL . По теореме о трёх перпендикулярах наклонная KM к плоскости ADL будет перпендикулярна прямой DL , где DL – линия пересечения плоскостей ADL и KLD . Поэтому угол φ будет равен углу AMK . Треугольник AMK является прямоугольным, так как AK – перпендикуляр к плоскости ADL , и поэтому $AK \perp AM$. Откуда находим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AK}{AM}$. Учитывая,

что $AK = 0,6a$ и $AM = \frac{LA \cdot AD}{DL} = \frac{\frac{2}{3}a \cdot a}{\sqrt{(\frac{2}{3}a)^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$, находим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,6a}{\frac{2a}{\sqrt{13}}} = 0,3\sqrt{13}$, а

значит, окончательно получаем $\varphi = \operatorname{arctg} 0,3\sqrt{13}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 0,3\sqrt{13}$.

7. [15 баллов] Найдите все значения a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} |x - 4|(x - 6) \geq 0, \\ x^2 - a^2 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Множество решений первого неравенства: 4 или все $x \geq 6$. Решения второго неравенства образуют отрезок $-|a| \leq x \leq |a|$. Этот отрезок пересекается с первым множеством только в одной точке, если эта точка – изолированное решение $x = 4$ и при этом $|a| < 6$.

Ответ: $a \in (-6; -4] \cup [4; 6)$.

8. [15 баллов]

Если $f(2x + 1) = e^x$, $f(g(x)) = x^2$, то какова функция $g(x)$?

Решение. Выясним, как функция f действует на свой аргумент. Для этого введем $t = 2x + 1$ и перепишем первое равенство из условия задачи в новых обозначениях: $f(t) = e^{\frac{t-1}{2}}$. В частности, $f(g(x)) = e^{\frac{g(x)-1}{2}}$. Отсюда, учитывая второе равенство из условия, получаем $e^{\frac{g(x)-1}{2}} = x^2$, откуда следует $x \neq 0$. Поэтому $\frac{g(x)-1}{2} = \ln x^2$, и наконец, $g(x) = \ln x^4 + 1$.

Ответ: $g(x) = \ln x^4 + 1$.

Критерии оценивания выполнения заданий по геометрии.

Задание по геометрии состоит из двух частей, в которых требуется доказать утверждение, сформулированное в пункте *а*, и обоснованно получить верный ответ в ходе решения задачи пункта *б*. Все баллы, полученные за выполнение пункта *а* и за выполнение пункта *б*, складываются. Наивысшая оценка за решение геометрического задания (как по планиметрии, так и по стереометрии) 15 баллов.

Содержание критерия оценивания выполнения пункта <i>а</i>	Баллы
Имеется верное доказательство	7
Имеется доказательство с незначительным недочётом в ходе рассуждений	6
Имеется в целом верное доказательство с незначительными недочётами	5
Имеется негрубая ошибка, но идея доказательства верная и все его ключевые моменты достаточно аргументированы	4
Имеется негрубая ошибка, а также незначительные недочёты в ходе рассуждений, но идея доказательства верная и все его ключевые моменты аргументированы	3
Имеется ошибка, связанная с неполным описанием возможных случаев или содержащая какой-то другой серьёзный логический недостаток, возможно, при этом также допущены незначительные недочёты. Идея доказательства в рассматриваемом случае в целом верная и рассматриваемые ключевые моменты аргументированы	2
Имеется доказательство только для частного случая.	1
Доказательство утверждения пункта <i>а</i> отсутствует либо не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Содержание критерия оценивания выполнения пункта <i>б</i>	Баллы
Обоснованно получен верный ответ с учётом выполнения следующего требования (*): в ходе рассуждений либо не использовано утверждение пункта <i>а</i> , либо использовано, но при этом выполнение пункта <i>а</i> оценено не менее трёх баллов или в пункте <i>а</i> приведено полное доказательство частного случая, когда выполнены условия пункта <i>б</i>	8
В целом обоснованно с незначительной погрешностью в ходе рассуждений получен верный ответ, требование (*) выполнено	7
В целом обоснованно с незначительными погрешностями в ходе рассуждений получен верный ответ, требование (*) выполнено	6
Получен верный ответ, при этом обоснование в целом полное, только не выполнено требование (*),	5

ИЛИ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, обоснование полное, требование (*) выполнено	
Получен верный ответ, при этом в обосновании допущена незначительная погрешность, а также не выполнено требование (*), ИЛИ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, также в ходе обоснования имеется незначительная погрешность, но требование (*) выполнено	4
Получен верный ответ, при этом в обосновании допущены незначительные погрешности, а также не выполнено требование (*), ИЛИ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, также в ходе обоснования имеются незначительные погрешности, но требование (*) выполнено	3
Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, при этом обоснование в целом полное, только не выполнено требование (*), ИЛИ получен неверный ответ из-за арифметических ошибок, также в ходе обоснования имеется незначительная погрешность, но требование (*) выполнено	2
Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, при этом в обосновании допущена незначительная погрешность, а также не выполнено требование (*), ИЛИ получен неверный ответ из-за арифметических ошибок, также в ходе обоснования имеются незначительные погрешности, но требование (*) выполнено	1
Решение задачи пункта б отсутствует либо не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0