

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2022/2023 учебный год

Задания отборочного этапа

1. [10 баллов] В компании из трех человек один – правдивец, то есть всегда говорит правду, один – лжец, то есть всегда лжет, и один – дипломат, то есть говорит правду или лжет по своему усмотрению. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили, кто он есть. Первый ответил, что он правдивец, второй – что он лжец, а третий – что он или правдивец, или лжец, или дипломат. Судя по ответам, обоснуйте, кем является каждый из них.

2. [10 баллов] График функции, задаваемой при $x < 0$ равенством $f(x) = x^6 - \frac{1}{2^x}$, симметричен относительно начала координат. Какой формулой задается эта функция при $x > 0$?

3. [10 баллов] Решите уравнение

$$4^{\sin^2 x} + 4^{1+\cos^2 x} = 10.$$

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$\log_2 \log_{x^2} \log_{x^2} x^6 > 0.$$

5. [15 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH . На катетах AC и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $CP = CQ = CH$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AHC окружности лежит на отрезке PQ .

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанными в треугольники AHC и BHC , если ещё известно, что $CH = 12$ и $\angle A = \arccos 0,8$.

6. [15 баллов] Дана пирамида, в основании которой лежит трапеция Φ . Плоскость α содержит среднюю линию трапеции Φ и проведена параллельно одному из боковых рёбер пирамиды. В сечении пирамиды плоскостью α получается фигура Ψ .

а) Докажите, что Ψ – трапеция.

б) Найдите отношение площадей фигур Φ и Ψ , если ещё известно, что 1) плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды; 2) высота пирамиды равна высоте трапеции Φ ; 3) длины оснований трапеции Φ относятся как 1:2.

7. [15 баллов] При всех допустимых значениях параметра a найдите все решения неравенства $\sqrt{x - a + 2} < \sqrt{5a - 1} + \sqrt{x + 4a + 1}$.

8. [15 баллов] Робот находится в угловой комнате A на первом этаже дома, имеющего вид куба $3 \times 3 \times 3$. Каждый кубик размером $1 \times 1 \times 1$ – это отдельная комната. Если две комнаты имеют общую стену (или пол, или потолок), то из одной можно попасть в другую (там есть соответствующие двери и лестницы). Робота нужно попасть в комнату C , которая находится в противоположном углу куба на третьем этаже. Робот может перемещаться из данной комнаты в соседнюю по грани, если после такого перемещения расстояние от центра комнаты, в которой он находится, до центра комнаты C уменьшится. Сколько существует маршрутов из комнаты A в комнату C , если а) по пути обязательно нужно посетить комнату B , которая находится в центре куба; б) посещать комнату B нельзя?

