Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2022/2023 учебный год

Задания отборочного этапа

- 1. [10 баллов] В компании из трех человек один правдивец, то есть всегда говорит правду, один лжец, то есть всегда лжет, и один дипломат, то есть говорит правду или лжет по своему усмотрению. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили, кто он есть. Первый ответил, что он правдивец, второй что он лжец, а третий что он или правдивец, или лжец, или дипломат. Судя по ответам, обоснуйте, кем является каждый из них.
- 2. [10 баллов] График функции, задаваемой при x < 0 равенством $f(x) = x^6 \frac{1}{2^x}$, симметричен относительно начала координат. Какой формулой задается эта функция при x > 0?
- 3. [10 баллов] Решите уравнение

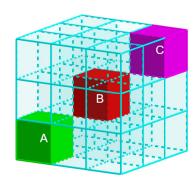
$$4^{\sin^2 x} + 4^{1 + \cos^2 x} = 10.$$

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$\log_2 \log_{x^2} \log_{x^2} x^6 > 0.$$

- 5. [15 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH. На катетах AC и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что CP = CQ = CH.
- а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AHC окружности лежит на отрезке PQ.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанными в треугольники *АНС* и *ВНС*, если ешё известно, что CH = 12 и $\angle A = \arccos 0.8$.
- 6. [15 баллов] Дана пирамида, в основании которой лежит трапеция Φ . Плоскость α содержит среднюю линию трапеции Φ и проведена параллельно одному из боковых рёбер пирамиды. В сечении пирамиды плоскостью α получается фигура Ψ .
- а) Докажите, что Ч трапеция.
- б) Найдите отношение площадей фигур Φ и Ψ , если ещё известно, что 1) плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды; 2) высота пирамиды равна высоте трапеции Φ ; 3) длины оснований трапеции Φ относятся как 1: 2.

- 7. [15 баллов] При всех допустимых значениях параметра a найдите все решения неравенства $\sqrt{x-a+2} < \sqrt{5a-1} + \sqrt{x+4a+1}$.
- 8. [15 баллов] Робот находится в угловой комнате A на первом этаже дома, имеющего вид куба $3 \times 3 \times 3$. Каждый кубик размером $1 \times 1 \times 1$ это отдельная комната. Если две комнаты имеют общую стену (или пол, или потолок), то из одной можно попасть в другую (там есть соответствующие двери и лестницы). Роботу нужно попасть в комнату C, которая находится в противоположном углу куба на третьем



этаже. Робот может перемещаться из данной комнаты в соседнюю по грани, если после такого перемещения расстояние от центра комнаты, в которой он находится, до центра комнаты С уменьшится. Сколько существует маршрутов из комнаты А в комнату С, если а) по пути обязательно нужно посетить комнату В, которая находится в центре куба; б) посещать комнату В нельзя?