

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2022/2023 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [10 баллов] Решите неравенство

$$3^{x^2} + 3^{2-x^2} \geq 10.$$

2. [10 баллов] Решите неравенство

$$\ln(5x-4)^2 > \sqrt{\ln(4-5x)} + 1.$$

3. [10 баллов] Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x} - \sqrt{x^2 - \frac{7}{2}x - 2}}{x^2 + 6x + 3} \geq 0.$$

4. [10 баллов] При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 + 8x + 8 = a$$

имеет решения?

5. [15 баллов] Непрямоугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Точка D расположена на стороне AB так, что прямые OD и AC перпендикулярны.

а) Докажите, что точки B, C, D и O лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C, D и O , если ещё известно, что $AB = \sqrt{3}, AC = 1$ и радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1.

6. [15 баллов] Сторона AB основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в шесть раз больше бокового ребра AA_1 . Точки M и N расположены на отрезках AB и AC так, что $AM:MB = CN:NA = 1:2$. Плоскость α содержит прямую MN и образует с плоскостью основания ABC угол 45° .

а) Докажите, что плоскость α может совпадать с плоскостью MNC_1 .

б) Найдите площадь сечения данной призмы плоскостью α , если ещё известно, что площадь треугольника ABC равна $27\sqrt{2}$.

7. [15 баллов] Определите количество различных значений $a \in [5\pi; 19\pi]$, для каждого из которых уравнение

$$\sqrt{\cos \frac{x}{4}} = \cos \frac{2(a-x)}{5} - 1$$

имеет хотя бы одно решение.

8. [15 баллов] Укажите количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10$ в натуральных числах.