Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2022/2023 учебный год

Задания отборочного этапа

1. [10 баллов] В компании из трех человек один – правдивец, то есть всегда говорит правду, один – лжец, то есть всегда лжет, и один – дипломат, то есть говорит правду или лжет по своему усмотрению. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили кто он есть. Первый ответил, что он правдивец, второй – что он лжец, а третий – что он или правдивец, или лжец, или дипломат. Судя по ответам, обоснуйте, кем является каждый из них.

Решение. Второй, судя по ответу, не может быть лжецом, иначе бы он сказал правду. Также второй не может быть правдивцем, так как ответ второго для правдивца является ложью. Значит, второй – дипломат. Ответ третьего истинен, кем бы он ни был, поэтому третий не может быть лжецом, а значит, третий – правдивец. Тогда первый – лжец, причем ответ первого для лжеца возможен.

2. [10 баллов] График функции, задаваемой при $x < 0$ равенством $f(x) = x^6 - \frac{1}{2^x}$, симметричен относительно начала координат. Какой формулой задается эта функция при $x > 0$?

Решение. График функции симметричен относительно начала координат, если только эта функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$. Полагая в последнем равенстве $x > 0$, получим $f(x) = -f(-x) = -\left((-x)^6 - \frac{1}{2^{-x}}\right) = 2^x - x^6$.

Ответ: $f(x) = 2^x - x^6$ при $x > 0$.

3. [10 баллов] Решите уравнение

$$4^{\sin^2 x} + 4^{1+\cos^2 x} = 10.$$

Решение. Умножим обе части равенства на $4^{\cos^2 x}$:

$$4^{\sin^2 x+\cos^2 x} + 4 \cdot (4^{\cos^2 x})^2 = 10 \cdot 4^{\cos^2 x}$$

Пусть $t = 4^{\cos^2 x}$. Тогда получим уравнение:

$$4 + 4t^2 = 10t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}, \\ t=2. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 4^{\cos^2 x}=\frac{1}{2}, \\ 4^{\cos^2 x}=2. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\cos^2 x}=4^{-\frac{1}{2}}, \\ 4^{\cos^2 x}=4^{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

Значит, $\cos^2 x=-\frac{1}{2}$ или $\cos^2 x=\frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет решений в действительных числах.

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{или} \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in\mathbb{Z} \qquad \text{или} \qquad x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$.

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$\log_2 \log_{x^2} \log_{x^2} x^6>0.$$

Решение. Заметим, что $\log_{x^2} x^6=3$. Исходное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2>0, \\ x^2\neq 1, \\ \log_{x^2} 3>0, \\ \log_2 \log_{x^2} 3>0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x\neq 0, \\ x\neq\pm 1, \\ |x|>1, \\ \log_{x^2} 3>1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} |x|>1, \\ (x^2)^{\log_{x^2} 3}>(x^2)^1, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} |x|>1, \\ 3>x^2. \end{array}\right.$$

Значит, $x\in\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $x\in\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

5. [15 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH. На катетах AC и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $CP = CQ = CH$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AHC окружности лежит на отрезке PQ.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанными в треугольники AHC и BHC, если ещё известно, что $CH = 12$ и $\angle A = \arccos 0{,}8$.

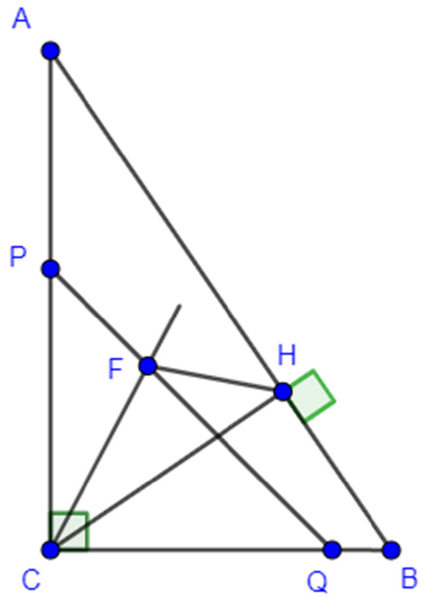


Рис. 1

Решение.

а) В треугольнике AHC проведём биссектрису угла C (рис. 1), которая пересекает отрезок PQ в точке F. Треугольники PCF и HCF равны по двум сторонам и углу между ними ($CP = CH$ по условию, CF – общая сторона, $\angle PCF = \angle HCF$ по построению). Поэтому углы CPF и CHF равны. Но угол CPF равен $45°$, так как прямоугольный треугольник PQC является равнобедренным ($CP = CQ$ по условию), а значит, и угол CHF тоже равен $45°$. Откуда следует, что HF – биссектриса угла AHC, то есть F – точка пересечения двух биссектрис CF и HF треугольника AHC. Откуда окончательно следует, что F – центр окружности, вписанной в треугольник AHC.

б) Пусть $\angle A = \alpha$. По условию $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, то есть $\sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$. Так как $CH = 12$, то из ΔAHC находим $AC = \frac{CH}{\sin\alpha} = \frac{12}{\frac{3}{5}} = 20$ и $AH = AC \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$. Из треугольника ABC находим $BC = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ и $AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = 25$, то есть $BH = AB - AH = 25 - 16 = 9$. Итак, $AH = 16, CH = 12$ и $AC = 20$, а также $BH = 9, CH = 12$ и $BC = 15$.

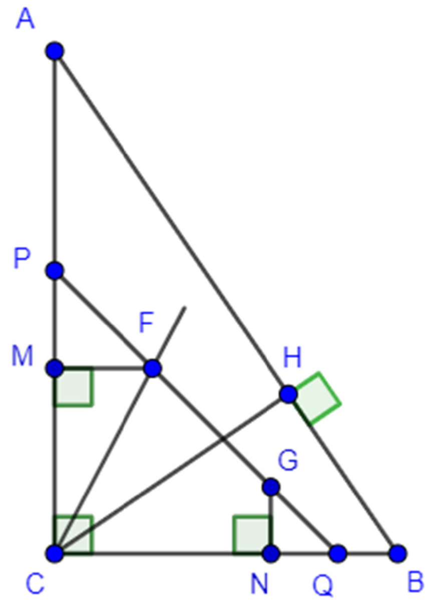


Рис. 2

Далее, известно, что в прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c радиус r вписанной окружности может быть найден, например, по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$. Поэтому в прямоугольных треугольниках AHC и BHC находим радиусы вписанных в них окружностей:

$$r_{AHC} = \frac{16 + 12 - 20}{2} = 4 \text{ и } r_{BHC} = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3.$$

Пусть, как и в пункте а), F – центр окружности, вписанной в треугольник AHC и M – точка касания этой окружности со стороной AC. Ясно, что FM – радиус окружности, то есть $FM \perp AC$ и $FM = 4$. Как и в а) имеем $\angle MPF = 45°$, то есть MPF равнобедренный прямоугольный треугольник и поэтому $PF = \frac{FM}{\sin \angle MPF} = \frac{4}{\sqrt{2}/2} = 4\sqrt{2}$.

Пусть G – центр окружности, вписанной в треугольник BHC и N – точка касания этой окружности со стороной BC. Как и в а) по аналогии замечаем, что точка G расположена на отрезке PQ. Ясно, что $GN \perp BC$ и $GN = 3$, а также ΔNQG – равнобедренный треугольник ($\angle NQG = \angle CQP = 90° - \angle CPQ = 45°$). Откуда находим $QG = \frac{GN}{\sin \angle NQG} = \frac{3}{\sqrt{2}/2} = 3\sqrt{2}$.

Из равнобедренного прямоугольного треугольника CPQ в силу $CP = CH = 12$ получим $PQ = \frac{CP}{\cos \angle CPQ} = \frac{12}{\sqrt{2}/2} = 12\sqrt{2}$. Тогда искомое расстояние между центрами F и G (см. рис. 2) будет равно $PQ - PF - QG = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: б) $5\sqrt{2}$.

6. [15 баллов] Дана пирамида, в основании которой лежит трапеция Ф. Плоскость α содержит среднюю линию трапеции Ф и проведена параллельно одному из боковых рёбер пирамиды. В сечении пирамиды плоскостью α получается фигура Ψ.

а) Докажите, что Ψ – трапеция.

б) Найдите отношение площадей фигур Ф и Ψ, если ещё известно, что 1) плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды; 2) высота пирамиды равна высоте трапеции Ф; 3) длины оснований трапеции Ф относятся как 1:2.

Решение.

а) Пусть $SABCD$ – данная пирамида. Не ограничивая общности рассуждений с точностью до перестановки букв A, B, C и D, можем считать, что $ABCD$ – трапеция Ф с основанием AD, причём плоскость α параллельна боковому ребру SA. Далее, MN – средняя линия трапеции Ф (см. рис. 3). Так как $MN \parallel AD$, то $\alpha \parallel AD$, то есть α параллельна пересекающимся прямым AD и SA, а значит, α параллельна плоскости SAD. Пусть PM и QN – отрезки,

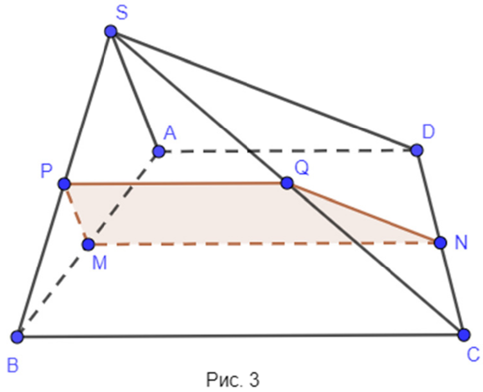


Рис. 3

получающиеся в пересечении плоскости α с боковыми гранями SAB и SCD соответственно. Так как $\alpha \parallel (SAD)$, то $PM \parallel SA$ и $QN \parallel SD$. Так M и N – середины отрезков AB и CD, то PM и QN – средние линии треугольников SAB и SCD

соответственно. Поэтому P и Q - тоже середины отрезков SB и SC, а значит PQ – средняя линия треугольника SBC. Учитывая, что $PQ \parallel BC$ и $MN \parallel BC$, получаем, что $MN \parallel PQ$, то есть сечение Ψ, являющееся четырёхугольником $MPQN$, будет либо трапецией, либо параллелограммом. Замечаем, что $MN = \frac{AD+BC}{2} > \frac{BC}{2} = PQ,$ а значит Ψ – трапеция.

б) Для данной пирамиды оставляем обозначения, принятые в пункте а). Пусть SO – высота пирамиды. Согласно 1) $\alpha \perp (ABC)$ и по доказанному в а) $\alpha \parallel (SAD)$. Поэтому $(SAD) \perp (ABC)$ и высота SO лежит в плоскости SAD, а значит точка O лежит на прямой AD, по которой пересекаются плоскости ABC и SAD (см. рис. 4). Через K обозначим основание перпендикуляра, проведённого из точки O к прямой BC, через L – точку пересечения прямых OK и MN, через T – точку пересечения прямых SK и PQ. Так как по доказанному в а) PQ – средняя линия треугольника SBC, то Q – середина отрезка SD и $QT \parallel KC$, а значит, QT – средняя линия треугольника SKC и T – середина отрезка SK. Так как MN – средняя линия трапеции $ABCD$, то N – середина отрезка CD и $NL \parallel KC$, а значит, NL – средняя линия трапеции $KODC$ и L – середина отрезка OK. Откуда получаем, что LT – средняя линия треугольника SOK, то есть $LT \parallel SO$ и $LT = SO/2$. Поэтому $LT \perp (ABC)$ и длина отрезка LT равна высоте трапеции $MPQN$. Далее замечаем, что длина отрезка OK равна высоте трапеции $ABCD$. Положим $SO = h$. Согласно условию 2) имеем $OK = h$ и $LT = h/2$. Теперь положим $PQ = a$. Тогда $BC = 2a$ (учли, что PQ – средняя линия в треугольнике SBC). Согласно условию 3) возможны два случая: (1) $AD = 4a$, (2) $AD = a$. В случае (1) имеем $S_{ABCD} = \frac{4a+2a}{2} \cdot h = 3ah$ и, так как $MN = \frac{4a+2a}{2} = 3a$, то $S_{MPQN} = \frac{3a+a}{2} \cdot \frac{h}{2} = ah$. Откуда получаем $\frac{S_{ABCD}}{S_{MPQN}} = \frac{3ah}{ah} = 3$. В случае (2) имеем $S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot h = \frac{3}{2}ah$ и, так как $MN = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$, то $S_{MPQN} = \frac{\frac{3}{2}a+a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{5}{8}ah$, откуда следует $\frac{S_{ABCD}}{S_{MPQN}} = \frac{\frac{3}{2}ah}{\frac{5}{8}ah} = \frac{12}{5}$.

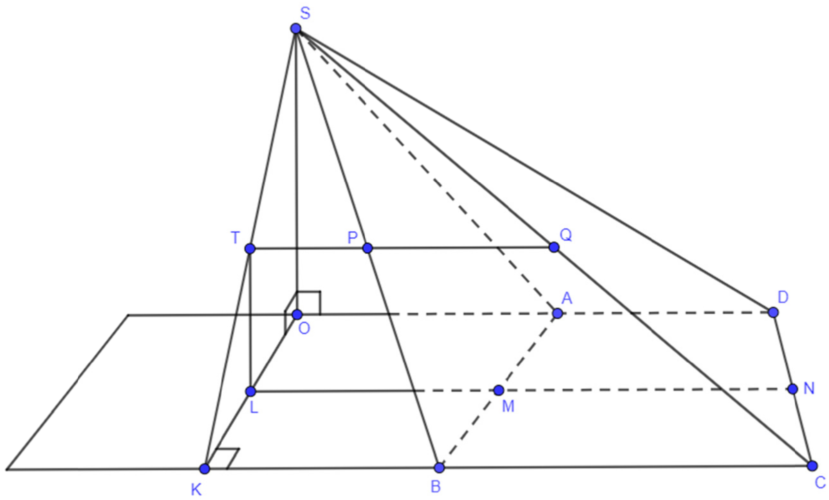


Рис. 4

Ответ: б) 3 или 12/5.

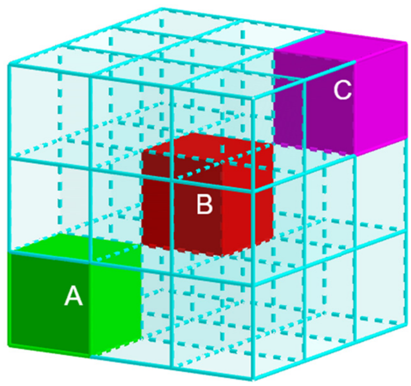
7. [15 баллов] При всех допустимых значениях параметра a найдите все решения неравенства $\sqrt{x-a+2} < \sqrt{5a-1} + \sqrt{x+4a+1}$.

Решение. Заметим, что последнее подкоренное выражение равно сумме двух других подкоренных выражений, то есть в условии дано неравенство вида $\sqrt{u} < \sqrt{v} + \sqrt{u+v}$ или, что равносильно, $\sqrt{u} - \sqrt{v} < \sqrt{u+v}$. Последнее неравенство выполнено, если только значения $u \geq 0$, а $v > 0$. Действительно, неравенство определено только при неотрицательных значениях u и v. Однако строгое неравенство не выполнено при нулевом значении v. Далее, если $0 \leq u < v$, то доказываемое неравенство выполнено, поскольку меньшая часть отрицательна, а большая положительна. Если же $0 < v \leq u$, то обе части неравенства неотрицательны, поэтому после возведения его в квадрат получим равносильное неравенство $u - 2\sqrt{u}\sqrt{v} + v < u + v$. Справедливость последнего неравенства очевидна. Итак, неравенство в условии задачи равносильно системе

$$\begin{cases} x - a + 2 \geq 0, \\ 5a - 1 > 0, \end{cases}$$

Откуда очевидно, что решения есть при всех значениях параметра $a > \frac{1}{5}$, при этом $x \geq a - 2$.

8. [15 баллов] Робот находится в угловой комнате A на первом этаже дома, имеющего вид куба $3 \times 3 \times 3$. Каждый кубик размером $1 \times 1 \times 1$ – это отдельная комната. Если две комнаты имеют общую стену (или пол, или потолок), то из одной можно попасть в другую (там есть соответствующие двери и лестницы). Роботу нужно попасть в комнату C, которая находится в противоположном углу куба на третьем этаже. Робот может перемещаться из данной комнаты в соседнюю по грани, если после такого перемещения расстояние от центра комнаты, в которой он находится, до центра комнаты C уменьшится. Сколько существует маршрутов из комнаты A в комнату C, если а) по пути обязательно нужно посетить комнату B, которая находится в центре куба; б) посещать комнату B нельзя?



Решение. Пусть α, β и γ – три грани куба, наиболее удалённые от комнаты A. Обозначим как $\bar{\alpha}$ перемещение робота по направлению к грани α, $\bar{\beta}$ – к грани β, $\bar{\gamma}$ – к грани γ. Для того чтобы попасть в комнату B, робот должен совершить по одному перемещению ($\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$) в любом порядке. Число возможных перестановок этих перемещений равно $3! = 6$. Аналогично, существует 6 маршрутов из B в C. Значит, из комнаты A в C, посетив B, можно попасть $6 \cdot 6 = 36$ способами.

Подсчитаем количество всех возможных маршрутов из A в C. Для того чтобы попасть в комнату C, робот должен совершить по два перемещения ($\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$) в любом порядке. Из шести перемещений два должны быть $\bar{\alpha}$ (C_6^2 вариантов), из оставшихся четырёх два должны быть $\bar{\beta}$ (C_4^2 вариантов) , последние два перемещения определяются однозначно ($\bar{\gamma}$). Следовательно, количество всех возможных маршрутов из A в C равно $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$. Тогда из комнаты A в C, не посещая B, можно попасть $90 - 36 = 54$ способами.

Ответ: а) 36; б) 54.