Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2022/2023 учебный год

Задания заключительного этапа

Критерии проверки заданий:

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. [10 баллов] Решите неравенство

$$3^{x^2}+3^{2-x^2}\ge 10.$$

Решение. Введём замену $a=3^{x^2}$, неравенство примет вид:

$$a+\frac{9}{a}\ge 10.$$

ОДЗ: $a\ge 1$.

Преобразуем неравенство

$$a^2+9\ge 10a.$$

$$a^2-10a+9\ge 0.$$

С учётом ОДЗ:

$$\begin{cases} a\ge 1, \\ a^2-10a+9\ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\in[1,+\infty), \\ a\in(-\infty,1]\cup[9,+\infty). \end{cases}$$

$$a\in\{1\}\cup[9,+\infty).$$

$$\left[\begin{array}{l} a=1, \\ a\ge 9. \end{array}\right.$$

С учётом введённой ранее замены получаем

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2}=1, \\ 3^{x^2}\ge 9. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x^2\ge 2. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right). \end{array}\right.$$

$$x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

Критерии оценивания:

Не учтено ОДЗ для переменной a – не более 5 баллов.

2. [10 баллов] Решите неравенство

$$\ln(5x-4)^2>\sqrt{\ln(4-5x)}+1.$$

Решение. ОДЗ неравенства: $4-5x\ge 1$, – тогда

$$2\ln|5x-4|>\sqrt{\ln(4-5x)}+1.$$

$$2\ln(4-5x)>\sqrt{\ln(4-5x)}+1.$$

Введём замену $a=\sqrt{\ln(4-5x)}$, неравенства примет вид:

$$2a^2>a+1.$$

$$2a^2-a-1>0.$$

$$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty).$$

С учётом $a\ge 0$, получаем: $a>1$. Тогда

$$\sqrt{\ln(4-5x)} > 1.$$

$$\ln(4-5x) > 1.$$

$$4-5x > e.$$

$$x < \frac{4-e}{5}.$$

Множество решений лежит в ОДЗ неравенства.

Ответ: $\left(-\infty, \frac{4-e}{5}\right)$.

Критерии оценивания:

Неправильно раскрыт модуль (не учтено ОДЗ) – 0 баллов.

Введена замена $a=\sqrt{\ln(4-5x)}$, получен корректный вид выражения для данной замены – 1 балл.

3. [10 баллов] Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}-\sqrt{x^2-\frac{7}{2}x-2}}{x^2+6x+3} \geq 0.$$

Решение. Так как $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}+\sqrt{x^2-\frac{7}{2}x-2} \geq 0$, умножим левую и правую часть неравенства на выражение $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}+\sqrt{x^2-\frac{7}{2}x-2}$.

Для ОДЗ $x^2-\frac{1}{2}x \geq 0$ и $x^2-\frac{7}{2}x-2 \geq 0$ получим:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}-\sqrt{x^2-\frac{7}{2}x-2}\right)\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x}+\sqrt{x^2-\frac{7}{2}x-2}\right)}{x^2+6x+3} \geq 0.$$

$$\frac{x^2-\frac{1}{2}x-\left(x^2-\frac{7}{2}x-2\right)}{x^2+6x+3} \geq 0.$$

$$\frac{3x+2}{x^2+6x+3} \geq 0.$$

С учётом ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}x \geq 0, \\ x^2 - \frac{7}{2}x - 2 \geq 0, \\ \frac{3x+2}{x^2+6x+3} \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4) \geq 0, \\ \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2+6x+3} \geq 0. \end{cases}$$

Вычислим корни квадратного трёхчлена x^2+6x+3 : $x = -3 \pm \sqrt{6}$. Тогда $x^2+6x+3 = \left(x+3+\sqrt{6}\right)\left(x+3-\sqrt{6}\right)$.

Заметим, что $-3+\sqrt{6} > -3+\sqrt{5.76} = -0.6 > -\frac{2}{3}$. Тогда методом интервалов решим каждое неравенство в системе:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty), \\ x \in \left(-3-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}\right] \cup \left(-3+\sqrt{6}, +\infty\right). \end{cases}$$

Заметим, что $-3+\sqrt{6} < -3+\sqrt{6.25} = -0.5$. Тогда общее решение

$$x \in \left(-3-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}\right] \cup \left(-3+\sqrt{6}, -\frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty).$$

Ответ: $\left(-3-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}\right] \cup \left(-3+\sqrt{6}, -\frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty)$.

Критерии оценивания:

Использовалась формула разности квадратов для того, чтобы избавиться от иррациональности числителя – 2 балла.

Не учтено ОДЗ – не более 3 баллов.

Допущены ошибки в сравнениях числа $-3+\sqrt{6}$ с $-\frac{2}{3}$ и/или $-\frac{1}{2}$ – минус 2 балла за каждую ошибку.

Неправильно найдено пересечение ОДЗ и преобразованного неравенства – не более 8 баллов.

4. [10 баллов] При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 + 8x + 8 = a$$

имеет решения?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 + 8x + 8, x \in \mathbb{R}$. Её производная $f'(x) = = 4x^3 + 8$ обращается в ноль в точке $x = -\sqrt[3]{2}$, которая является точкой минимума функции $f(x)$. Значит, $f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = (-\sqrt[3]{2})^4 + 8 * \left(-\sqrt[3]{2}\right) + 8 = 8 - 6\sqrt[3]{2}$ – минимальное значение выражения, стоящего в левой части исходного равенства. При любом $a \geq 8 - 6\sqrt[3]{2}$ исходное уравнение имеет решение, т. к. $f(x)$ – непрерывная функция и $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Ответ: $a \geq 8 - 6\sqrt[3]{2}$.

5. [15 баллов] Непрямоугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Точка D расположена на стороне AB так, что прямые OD и AC перпендикулярны.

а) Докажите, что точки B, C, D и O лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C, D и O, если ещё известно, что $AB = \sqrt{3}, AC = 1$ и радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 1.

Решение. а) Пусть K – точка пересечения прямых OD и AC . OK – высота в равнобедренном треугольнике AOC, а значит K – середина отрезка AC. DK – высота и медиана в треугольнике ADC, а значит он равнобедренный и $\angle DAC = \angle DCA$. Но тогда внешний угол BDC будет равен $\angle DAC + \angle DCA = 2\angle DAC = 2\angle BAC$. Центральный угол BOC, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол BAC тоже равен $2\angle BAC$.

Поэтому $\angle BOC = \angle BDC$. Это и означает, что вершины четырёхугольника $BCDO$ лежат на одной окружности.

б) По теореме синусов для треугольника ABC с учётом условия получим

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin\angle ACB} = \frac{1}{\sin\angle ABC} = 2.$$

Откуда находим $\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\angle ABC = \frac{1}{2}$. Замечаем, что угол ACB больше угла ABC, так как против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Поэтому угол ABC является острым, а значит $\angle ABC = 30°$. Для угла ACB возможны случаи $\angle ACB = 60°$ или $\angle ACB = 120°$. В случае $\angle ACB = 60°$ находим $\angle BAC = 180° - \angle ACB - -\angle ABC = 90°$, что противоречит условию. Поэтому $\angle ACB = 120°$ и тогда $\angle BAC = 180° - 120° - 30° = = 30°$. Откуда следует, что $\angle BOC = = 60°$, то есть треугольник BOC является равносторонним со стороной, равной 1. Искомый радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника BOC, а значит, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

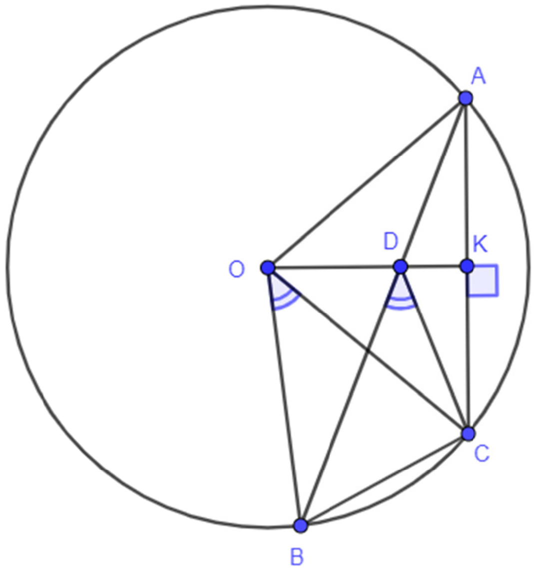

Рисунок 1.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания 5.

Полное доказательство пункта а) – 5 баллов;

Решение пункта б) со ссылкой на не решенный пункт а) - 5 баллов;

Решение пункта б) без ссылки на пункт а) – 10 баллов;

Полное решение пунктов а) и б) – 15 баллов.

Баллы, набранные за а) и б), складываются.

6. [15 баллов] Сторона AB основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в шесть раз больше бокового ребра AA_1. Точки M и N расположены на отрезках AB и AC так, что $AM{:}MB = CN{:}NA = 1{:}2$. Плоскость α содержит прямую MN и образует с плоскостью основания ABC угол 45°.

а) Докажите, что плоскость α может совпадать с плоскостью MNC_1.

б) Найдите площадь сечения данной призмы плоскостью α, если ещё известно, что площадь треугольника ABC равна $27\sqrt{2}$.

Решение. а) Надо доказать, что плоскость MNC_1 образует с плоскостью ABC угол 45°.

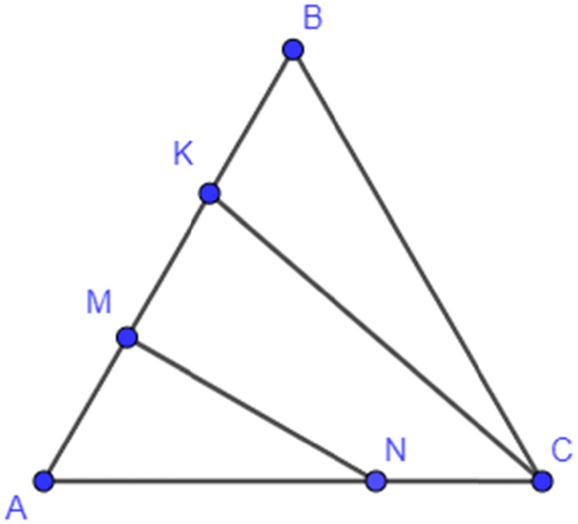

Рисунок 2.

Положим $AB = a$. Тогда $AM = \frac{a}{3}$, $AN = \frac{2a}{3}$ и $\angle BAC = 60°$. Откуда по теореме косинусов в треугольнике AMN получаем $MN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{3}$, а значит, $\cos\angle AMN = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} - \left(\frac{2a}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}} = 0$, то есть $\angle AMN = 90°$.

Пусть K и K_1 – середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно.

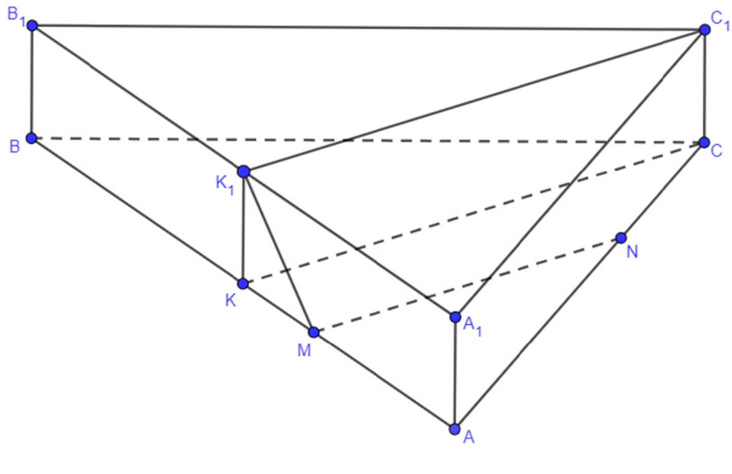

Рисунок 3.

Медиана CK в равностороннем треугольнике ABC (рис. 2) перпендикулярна AB и $\angle AMN = 90°$, поэтому $MN \parallel CK$. Плоскость MNC_1 пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой параллельной к MN. У нас $MN \parallel CK \parallel C_1K_1$, а значит C_1K_1 – прямая пересечения плоскостей MNC_1 и $A_1B_1C_1$. Откуда следует, что в сечении призмы плоскостью MNC_1 получим четырёхугольник MNC_1K_1. Замечаем, что KK_1 – перпендикуляр к плоскости ABC и $KM \perp MN$. По теореме о трёх перпендикулярах $K_1M \perp MN$, а значит угол KMK_1 равен углу между плоскостями ABC и MNC_1. По условию при $AA_1 = h$ имеем $AB = 6h$, откуда $AM = 2h$ и по построению $AH = 3h$. Поэтому $KM = AK - AM = h$ и треугольник MKK_1 является прямоугольным, причём у него $KK_1 = AA_1 = h$ и $KM = h$. Откуда следует, что $\angle KMK_1 = 45°$, то есть плоскость MNC_1 образует с плоскостью ABC угол, равный 45°. Последнее и означает, что плоскость α может совпасть с плоскостью MNC_1.

б) Как и в а) полагаем $AA_1 = h$. Тогда, сохраняя обозначение рисунка 3, из а) следует $AB = 6h$, $KM = h$ и $AM = 2h$, а также $\angle KMK_1 = 45°$ – – линейный угол между полуплоскостями NMK и NMK_1. Через прямую MN можно провести две плоскости, которые образуют угол $45°$ с плоскостью ABC. Одна из них MNC_1. Другая плоскость строится так: пусть L – середина отрезка AM и L_1 – проекция L на плоскость $A_1B_1C_1$ (рис. 1). Ясно, что $ML = h, LL_1 = h$ и $\angle MLL_1 = 45°$. Аналогично, как и в а) $\angle MLL_1$ равен углу между плоскостями ABC и MNL_1, то есть α может совпадать с плоскостью MNL_1. Тогда сечение призмы плоскостью MNL_1 будет $MNPL_1$, где P – точка пересечения этой плоскости с A_1C_1. Ясно, что $MN \parallel PL_1$, а значит, $PL_1 \parallel C_1K_1$. Из подобия треугольников A_1PL_1 и $A_1C_1K_1$ находим $PL_1 = \frac{A_1L_1}{A_1K_1} \cdot C_1K_1 = \frac{1}{3}CK$. Далее, из подобия треугольников AMN и AKC находим $MN = \frac{AM}{AK} \cdot CK = = \frac{2}{3} \cdot CK$.

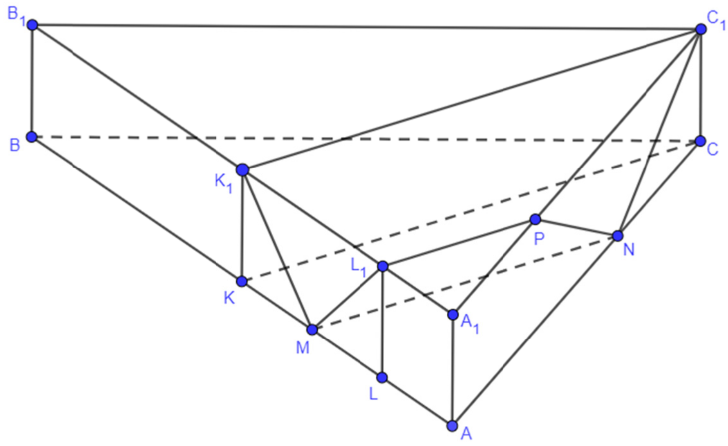

Рисунок 4.

Замечаем, что $K_1M \perp MN$ и $L_1M \perp MN$, а также из треугольников MKK_1 и MLL_1 находим $K_1M = L_1M = \sqrt{2}h$. Так как площадь равностороннего треугольника ABC со стороной $AB = 6h$ равна по условию $27\sqrt{2}$, то получаем равенство $27\sqrt{2} = (6h)^2\sqrt{3}/4$. Из этого равенства имеем: $27\sqrt{2} = \frac{36\sqrt{3}h^2}{4}, 3\sqrt{2} = \sqrt{3}h$ и $h = \sqrt[4]{6}$. Высота CK треугольника ABC равна $6h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}$, откуда следует $PL_1 = \frac{1}{3}CK = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}$ и $MN = \frac{2}{3}CK = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}$, а также $K_1M = L_1M = \sqrt{2}h = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$.

Итак, осталось найти площади сечений MNC_1K_1 и $MNPL_1$. Четырёхугольник MNC_1K_1 является трапеций с высотой $K_1M = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$ и основаниями $MN = 2\sqrt{3} \cdot \cdot \sqrt[4]{6}, C_1K_1 = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}$. Поэтому его площадь равна $K_1M \cdot \frac{MN + C_1K_1}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6} + 3\sqrt{3}\sqrt[4]{6}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{6}}{2} = 15$. Также четырёхугольник $MNPL_1$ является трапецией с высотой $L_1M = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$ и основаниями $MN = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}, PL_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6}$. Площадь трапеции $MNPL_1$, равна $L_1M \cdot \frac{MN + PL_1}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{6} + \sqrt{3}\sqrt[4]{6}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{6}}{2} = 9$.

Ответ: б) 15 или 9.

Критерии оценивания выполнения задания 6.

Решение только одного случая б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 3 балла;

Решение пункта а) - 5 баллов;

Решение двух случаев пункта б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 5 баллов;

Строгое решение одного случая из б) – 5 баллов;

Верное решение пункта б) без ссылки на а) – 10 баллов;

Решение случая а) и рассмотрение только одного случая б) – 10 баллов;

Решение пунктов а) и б) – 15 баллов.

Баллы, набранные за а) и б), складываются.

7. [15 баллов] Определите количество различных значений $a \in [5\pi; 19\pi]$, для каждого из которых уравнение

$$\sqrt{\cos\frac{x}{4}} = \cos\frac{2(a-x)}{5} - 1$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Левая часть уравнения неотрицательна, правая неположительна, поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{4} = 0, \\ \cos\frac{2(a-x)}{5} = 1, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} x = 4\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), k\epsilon Z, \\ \frac{2(a-x)}{5} = 2\pi n, n\epsilon Z. \end{cases}$$

Откуда $a = 2\pi + 4\pi k + 5\pi n$. С учетом условия $a \in [5\pi; 19\pi]$ должно выполняться двойное неравенство $3 \leq 5n + 4k \leq 17$. В последнем промежутке 15 целых чисел. Остается заметить, что любое целое число m можно представить в виде $5n + 4k$, например, $m = 5m + 4(-m)$.

Ответ: 15.

8. [15 баллов] Укажите количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 10$ в натуральных числах.

Решение. Возможны следующие случаи:

1) Среди значений неизвестных есть число 4, которое может принимать любая переменная из семи, остальные шесть равны 1. Всего 7 решений.
2) Среди значений неизвестных есть числа 2 и 3, остальные пять равны 1. Из семи неизвестных выбрать две такие, что одна равна двум, другая трём, можно $7 * 6 = 42$ способами. Значения остальных неизвестных определяются однозначно.
3) Среди неизвестных три принимают значение 2, остальные четыре – значение 1. Из семи неизвестных выбрать три, равные 2, можно $C_7^3 = \frac{7*6*5}{3!} = 35$ способами. Значения остальных неизвестных определяются однозначно.

Следовательно, количество возможных решений этого уравнения равно $7 + +42 + 35 = 84$.

Критерии оценивания:

Правильно найдено кол-во решений случая 1) – 3 балла.

Правильно найдено кол-во решений случая 2) – 5 баллов.

Правильно найдено кол-во решений случая 3) – 7 баллов.