

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2023/2024 учебный год

Задания отборочного этапа

1. [10 баллов] Существуют ли 3 различных рациональных числа таких, что произведение любых двух из них – целое число, а произведение всех трех – нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел.

2. [10 баллов] Сколькими способами модница сможет пришить к своему пальто 6 белых, 4 чёрных и 3 фиолетовых пуговицы в ряд, если пуговицы белого цвета не должны оказаться рядом? (Пуговицы одного цвета ничем не отличаются друг от друга.)

3. [10 баллов] Решите неравенство $|x^2 + x - 6| \leq 2x + 6$.

4. [10 баллов] Решите неравенство $x\sqrt{x^2-6} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-6} \leq 2$.

5. [15 баллов] В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка D так, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$.

а) Докажите, что хотя бы один из треугольников ACD или CBD подобен треугольнику ABC .

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $3AC = 3BC = 5CD$ и площадь треугольника ACD равна 144.

6. [15 баллов] SO – высота треугольной пирамиды $SABC$, причём точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC .

а) Докажите, что плоскости SAB, SBC и SAC образуют с плоскостью ABC равные углы.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями SAB и ABC , если ещё известно, что $AB = BC = AC = SO$.

7. [15 баллов] Решите уравнение

$$4^{\sin^2 x + \cos y} + 4^{\cos^2 y + \sin x} = 2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

8. [15 баллов] В прямоугольный треугольник AOB , катеты которого OA и OB ($OA > OB$) лежат соответственно на координатных осях Ox и Oy , вписана окружность радиуса 10. Найдите координаты точки касания окружности и гипотенузы AB , если треугольник AOB лежит в первой четверти координатной плоскости и его площадь равна 600.