Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2023/2024 учебный год

Задания отборочного этапа

Критерии проверки заданий:

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. [10 баллов] Существуют ли 3 различных рациональных числа таких, что произведение любых двух из них – целое число, а произведение всех трех – нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел.

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что нашлись такие 3 числа: a, b, c. Тогда числа ab, bc, ca – целые, а число $abc = p/q$ – нет. Тогда и число $(abc)^2 = p^2/q^2$ нецелое. Но $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca)$ — целое как произведение целых. Противоречие.

Критерии. Ответ «не существуют» без обоснования – *0 баллов*. Тот факт, что если рациональное число не является целым, то не является целым и его квадрат, считать известным.

2. [10 баллов] Сколькими способами модница сможет пришить к своему пальто 6 белых, 4 чёрных и 3 фиолетовых пуговицы в ряд, если пуговицы белого цвета не должны оказаться рядом? (Пуговицы одного цвета ничем не отличаются друг от друга.)

Ответ: 980.

Решение. В ряд можно расположить 4 чёрных и 3 фиолетовых пуговицы $C_7^3 = 35$ способами. Белые пуговицы могут располагаться в промежутках между ними, непосредственно после или перед ними, т. е. на 8 возможных позициях. Итого $C_7^3 \cdot C_8^6 = 35 \cdot 28 = 980$ вариантов.

Критерии. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Верно подсчитано количество вариантов расположения только чёрных и фиолетовых пуговиц – 4 балла.

3. [10 баллов] Решите неравенство $|x^2+x-6| \leq 2x+6$.

Ответ: $x=-3$ или $0 \leq x \leq 4$.

Решение. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ имеет то же множество решений, что и двойное неравенство $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ или система неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x^2+x-6 \leq 2x+6, \\ x^2+x-6 \geq -(2x+6). \end{cases}$$

Решая каждое из этих неравенств, получим:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3, \\ x \geq 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Итак, $x=-3$ или $0 \leq x \leq 4$.

Критерии. В ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного исключением точек -3, 0 или 4 – не более 5 баллов. Неправильно раскрыт модуль – не более 3 баллов.

4. [10 баллов] Решите неравенство $x\sqrt{x^2-6}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-6} \leq 2$.

Ответ: $\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{8}$.

Решение. Пусть $t=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-6} \geq 0$ и определено только при $x \geq \sqrt{6}$. После замены для нового неравенства $t^2-t-2 \leq 0$ подходящими решениями будут значения $t=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-6} \leq 2$. Последнее неравенство при $x \geq \sqrt{6}$ равносильно биквадратному неравенству $x^2(x^2-6) \leq 16$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $x^2 \leq 8$.

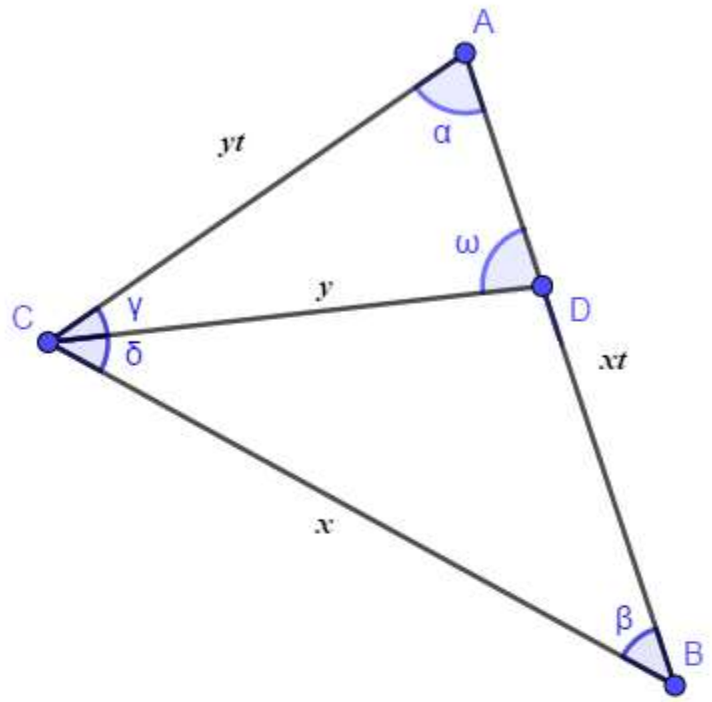
5. [15 баллов] В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка D так, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$.

а) Докажите, что хотя бы один из треугольников ACD или CBD подобен треугольнику ABC.

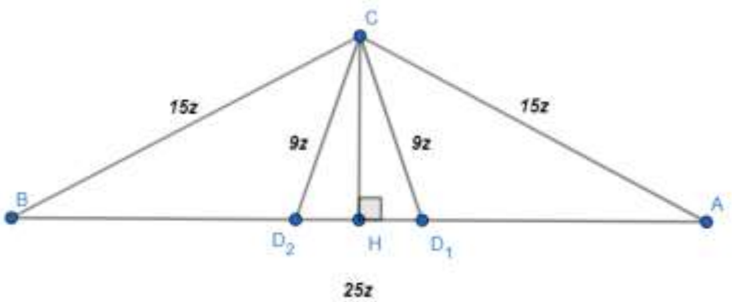
б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $3AC = 3BC = 5CD$ и площадь треугольника ACD равна144.

Решение.

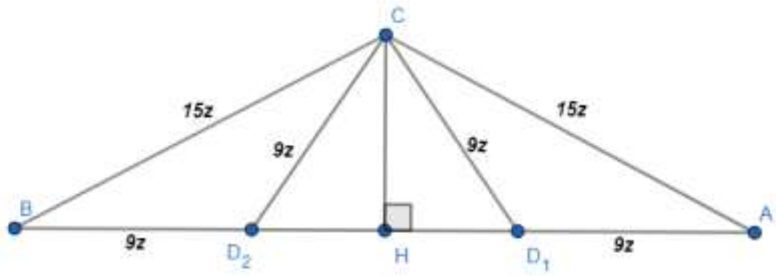
а) Пусть $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} = t, BC = x,$ и $CD = y$. Тогда $AB = xt$ и $AC = yt$. Положим, $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACD = \gamma, \angle BCD = \delta$ и $\angle ADC = \omega$. По теореме синусов для треугольников ABC и ACD имеем $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{xt}{\sin(\gamma+\delta)}$ и $\frac{yt}{\sin\omega} = \frac{y}{\sin\alpha}$, т.е. $t = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\alpha}$ и $t = \frac{\sin\omega}{\sin\alpha}$, а значит, $\sin(\gamma+\delta) = \sin\omega$. Учитывая, что $\sin\omega = \sin(\pi - (\gamma+\alpha)) = \sin(\gamma+\alpha)$, получаем, $\sin(\gamma+\delta) = \sin(\gamma+\alpha)$. Так как $0 < \gamma+\alpha < \pi$ и $0 < \gamma+\delta < \pi$, то возможны только два случая: 1) $\gamma+\delta = \gamma+\alpha$, т.е. $\alpha = \delta$; 2) $\gamma+\alpha = \pi - (\gamma+\delta)$, то есть $\gamma+\alpha = \alpha+\beta$ и $\beta = \gamma$. В каждом из этих случаев соответственно ΔCBD или ΔACD является подобным ΔABC по двум углам.



б) Положим $CD = 9z$. Тогда $AC = BC = 15z$. Так как согласно пункту а) $t = \frac{AC}{CD} = \frac{15z}{9z} = \frac{5}{3}$ и $x = BC = 15z$, то $AB = xt = 25z$. Итак, ABC – равнобедренный треугольник со сторонами $AC = BC = 15z$ и $AB = 25z$. Заметим, что высота CH равна $\sqrt{(15z)^2 - \left(\frac{25z}{2}\right)^2} = \frac{5z}{2}\sqrt{11}$. Ясно, что $\frac{5z}{2}\sqrt{11} < 9z$. Окружность радиуса $9z$ с центром в точке C пересечёт отрезок AB в точках D_1 и D_2, каждая из которых может совпадать с точкой D. Других возможных расположений точки D на отрезке AB не существует. Согласно пункту а) один из треугольников ACD или CBD гарантировано подобен треугольнику ABC. Но в силу $\cos\angle ACB = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC} = \frac{(15z)^2+(15z)^2-(25z)^2}{2\cdot 15z\cdot 15z} < 0$



замечаем, что угол ACB тупой. Поэтому хотя бы один из треугольников ACD или CBD является тупоугольным равнобедренным треугольником, у которого две стороны равны $9z$ и $15z$. Так как треугольник со сторонами $9z, 15z$ и $15z$ остроугольный, то стороны одного из треугольников ACD или CBD будут равны $9z, 9z$ и $15z$, и он действительно будет подобен треугольнику ABC со сторонами $15z, 15z$ и $25z$ с коэффициентом $k = \frac{3}{5}$. Уточним рисунок с учётом его симметрии относительно прямой CH.



Рассмотрим случай, когда точка D совпадает с точкой D_1. По условию, $S_{ACD} = 144$, а значит $S_{ABC} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 144$ и $S_{ABC} = \frac{144 \cdot 25}{9} =$ $= 16 \cdot 25 = 400$.

Теперь рассмотрим случай, когда точка D совпадает с точкой D_2. По условию $S_{ACD} = 144$, а значит $S_{CBD} = S_{ABC} - 144$. Откуда в силу подобия треугольника CBD треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{3}{5}$ получаем $S_{ABC} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = S_{ABC} - 144$. Поэтому $S_{ABC} = \frac{144}{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{144 \cdot 25}{16} = 9 \cdot 25 = 225$.

Ответ: б) 225 или 400.

6. SO – высота треугольной пирамиды $SABC$, причём точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC.

а) Докажите, что плоскости SAB, SBC и SAC образуют с плоскостью ABC равные углы.

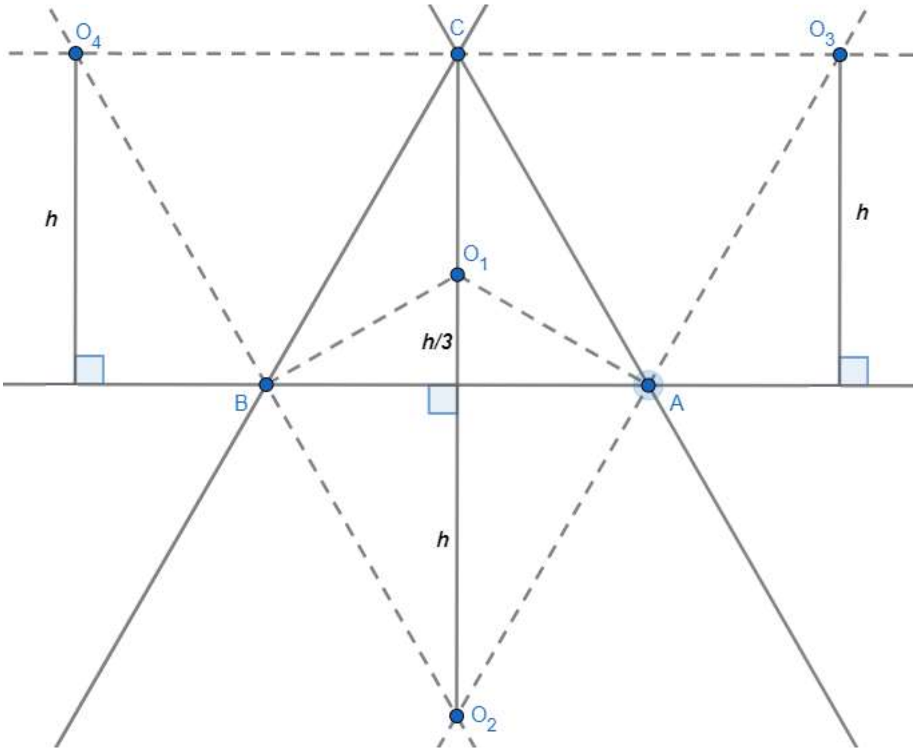
б) Найдите тангенс угла между плоскостями SAB и ABC, если ещё известно, что $AB = BC = AC = SO$.

Решение.

а) Пусть расстояние от точки O до каждой из прямых AB, BC и AC равно d, и l – одна из этих прямых. Положим, что P – основание перпендикуляра, проведённого из точки O к прямой l. Так как SO – перпендикуляр к плоскости ABC, то SP – наклонная и OP – её проекция на плоскость ABC. В силу $OP \perp l$ по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $SP \perp l$. Поэтому угол между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку S и прямую l, равен углу между прямыми SP и OP. Тангенс угла между этими прямыми находим из прямоугольного треугольника SPO, он будет равен $\frac{SO}{d}$. Как видим, тангенс угла не зависит от того, с какой прямой

AB, BC или AC совпадает прямая l. Поэтому тангенсы углов, образованных каждой из плоскостей SAB, SBC и SAC с плоскостью ABC, равны одному и тому же числу. Это и означает, что указанные три плоскости образуют равные углы с плоскостью ABC.

б) Так как точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC, то она совпадает с точкой пересечения биссектрис внутренних углов при паре вершин A и B, либо с



точкой пересечения биссектрис внешних углов при одной из пар вершин A и B, A и C или B и C (указанные биссектрисы изображены пунктирными линиями). На рисунке указаны все четыре возможности O_1, O_2, O_3, и O_4 расположения точки O. Учитываем, что треугольник ABC равносторонний. Тогда в треугольниках AO_3C, BO_4C и AO_2B углы будут по $60°$, то есть они равносторонние и, имея общую сторону с треугольником ABC, будут ему равны. Положим $AB = BC = AC = SO = a$. Тогда расстояние от O до AB, когда O совпадает с O_2, O_3, или O_4 равно высоте h треугольника ABC, то есть $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а когда O совпадает с O_1 равно $\frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (учли, что O_1 делит высоту-медиану в отношении $2:1$, считая от вершины C). Согласно пункту а) тангенс угла, образованного плоскостями SAB и ABC равен $\frac{SO}{d}$, где d – расстояние от точки O до прямой AB. Поэтому для искомого тангенса угла, образованного этими плоскостями, имеем два возможных значения:

$\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ или $2\sqrt{3}$.

Общий комментарий к заданиям 5 и 6.

Решение только одного случая б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 3 балла;

Решение пункта а) - 5 баллов;

Решение двух случаев пункта б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 5 баллов;

Строгое решение одного случая из б) – 5 баллов;

Верное решение пункта б) без ссылки на а) – 10 баллов;

Решение случая а) и рассмотрение только одного случая б) – 10 баллов;

Решение пунктов а) и б) – 15 баллов.

Баллы, набранные за а) и б), складываются.

7. [15 баллов] Решите уравнение

$$4^{sin^2x+cosy}+4^{cos^2y+sinx}=2sin\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z},\ \ y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

Решение. Воспользуемся неравенством Коши $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, которое справедливо для любых неотрицательных чисел a, b и равносильно неотрицательности квадрата разности. Для решений заданного уравнения получим следующее

$$\sqrt{2}=2sin\frac{\pi}{4}=4^{sin^2x+cosy}+4^{cos^2y+sinx}\geq 2\sqrt{4^{sin^2x+cosy+cos^2y+sinx}}=$$

$$=2\times 2^{(sinx+\frac{1}{2})^2+(cosy+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}},$$

то есть $2^{(sinx+\frac{1}{2})^2+(cosy+\frac{1}{2})^2}\leq 1.$ В последнем неравенстве показательная функция слева с неотрицательным показателем и основанием, большим 1, может принимать значения только не меньше 1. Значит, возможно только равенство, то есть показатель нулевой:

$$sinx+\frac{1}{2}=0 \text{ и } cosy+\frac{1}{2}=0\ .$$

Остается проверкой убедиться, что при $sinx=-\frac{1}{2}$ и $cosy=-\frac{1}{2}$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство.

8. [15 баллов] В прямоугольный треугольник *AOB*, катеты которого *OA* и *OB* (*OA*>*OB*) лежат соответственно на координатных осях *Ox* и *Oy*, вписана окружность радиуса 10. Найдите координаты точки касания окружности и гипотенузы *AB*, если треугольник *AOB* лежит в первой четверти координатной плоскости и его площадь равна 600.

Ответ: (16; 18).

Решение. Пусть длины катетов $OA=a$ и $OB=b$. Поскольку отрезки касательных на катетах в сумме дают длину гипотенузы, то с учетом теоремы Пифагора получаем уравнение

$$(a-10+b-\mathbf{10})^2=a^2+b^2,$$

которое с учетом известной площади треугольника $\frac{ab}{2}=600$, позволяет найти длины катетов: a=40 и b=30. Далее ищем координаты точки касания из уравнения прямой, содержащей гипотенузу $y=-\frac{3}{4}x+30$, и уравнения вписанной окружности $(x-10)^2+(y-10)^2=100.$