***Открытая многопрофильная олимпиада***

*Кубанского государственного университета*

*для школьников по* ***математике***

2023/2024 учебный год

Задания заключительного этапа

**Критерии проверки заданий**:

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания.

1. [15 баллов] Решите неравенство

$$\left|x\sqrt{5+x}\right| \geq x+3.$$

**Решение.** Неравенство определено только при $x \geq -5$. При $x+3 \leq 0$ неравенство выполнено с учетом области определения, то есть все $x \in [-5;-3]$ –решения. При $x \geq -3$ обе части неравенства неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим равносильное на этом множестве неравенство

$$x^2(5+x) \geq x^2+6x+9,$$

которое равносильно неравенству

$$(x+1)(x^2+3x-9) \geq 0.$$

Здесь решения последнего неравенства: $x \in [-3;-1] \cup \left[\frac{3\sqrt{5}-3}{2};\infty\right)$.

**Ответ:** $x \in [-5;-1] \cup \left[\frac{3\sqrt{5}-3}{2};\infty\right)$.

**Критерии.** Не учтено условие $x \geq -5$ – оценка снижается на 4 балла. Не рассмотрен случай $x+3 \leq 0$ –оценка снижается на 5 баллов. Верно решенное после возведения в квадрат рациональное неравенство оценивается в 6 баллов.

2. [15 баллов] Решите уравнение

$$\log_x(2x-1)\log_{2x-1}(3x-2)\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2023x-2022}(2024x-2023)=2.$$

**Решение.**

Заметим, что $x > 0$, $2x - 1 > 0$, $3x - 2 > 0$, $2024x - 2023 > 0$. Значит, $x > \frac{2023}{2024}$. С другой стороны, $x \neq 1$, $2x - 1 \neq 1$, $3x - 2 \neq 1$, $2023x - 2022 \neq 1$, т. е. $x \neq 1$.

Возведём величину $x$ в степень, указанную в левой части исходного равенства. Получим $x^2$, ведь эта степень равна 2.

$$\left(x^{\log_x(2x-1)}\right)^{\log_{2x-1}(3x-2)\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2023x-2022}(2024x-2023)} = x^2$$

$$\left((2x-1)^{\log_{2x-1}(3x-2)}\right)^{\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2023x-2022}(2024x-2023)} = x^2$$

$$\left((3x-2)^{\log_{3x-2}(4x-3)}\right)^{\log_{4x-3}(5x-4)\ldots\log_{2023x-2022}(2024x-2023)} = x^2$$

$$\ldots$$

$$2024x - 2023 = x^2$$

$$x^2 - 2024x + 2023 = 0$$

$$x = 1 \text{ или } x = 2023$$

Однако первый корень не входит в область допустимых значений.

**Ответ:** 2023.

**Критерии.** Получено равносильное алгебраическое уравнение – 10 баллов. Если в ответ включено лишнее число 1, оценка снижается на 3 балла.

3. [15 баллов] Найдите все действительные решения уравнения

$$y^2 - 2y\sin(xy) + 1 = 0.$$

**Решение.** Преобразуем уравнение

$$(y - \sin(xy))^2 + \cos^2(xy) = 0.$$

$$\begin{cases} y - \sin(xy) = 0, \\ \cos(xy) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \sin(xy) = y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Причём значению $y = 1$ соответствует $xy = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; подставляя, получаем первое решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \qquad y = 1. \end{cases}$$

И при $y = -1$ имеем $xy = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; подставляя, получим $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k$ или (с учётом того, что $k \in \mathbb{Z}$, знак перед $2\pi k$ значения не имеет):

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \qquad y = -1. \end{cases}$$

**Ответ:** $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$, $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m, -1\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

4. [15 баллов] Найдите все целочисленные решения $(x,y)$ уравнения

$$x(x+1) = 4y(y+1).$$

**Ответ:** (0;0), (0;–1), (–1;0), (–1;–1).

**Решение.** Если хотя бы одно из чисел $x, (x+1), y, (y+1)$ равно нулю, то получаем очевидные ответы.

Пусть теперь ни одно из этих чисел не равно нулю. Заметим, что целые числа $x, (x+1)$ одного знака и целые числа $y, (y+1)$ тоже одного знака. Можно считать, что все они положительные, так как если какая-то пара отрицательная, мы можем умножить все на (–1) и получим так же произведение двух подряд идущих положительных чисел.

Если $x \le 2y$, то рассматриваемое уравнение $x(x+1) = 4y(y+1)$ не выполнено:

$$x(x+1) \le 2y(2y+1) = 4y(y+0{,}5) < 4y(y+1).$$

Если же $2y < x$, то $(2y)^2 < x^2 < x(x+1) = 4y(y+1) < (2y+1)^2$ . Получили противоречие, так как между соседними целыми числами $2y$ и $2y+1$ других целых чисел нет. Значит, и в этом случае целых решений нет.

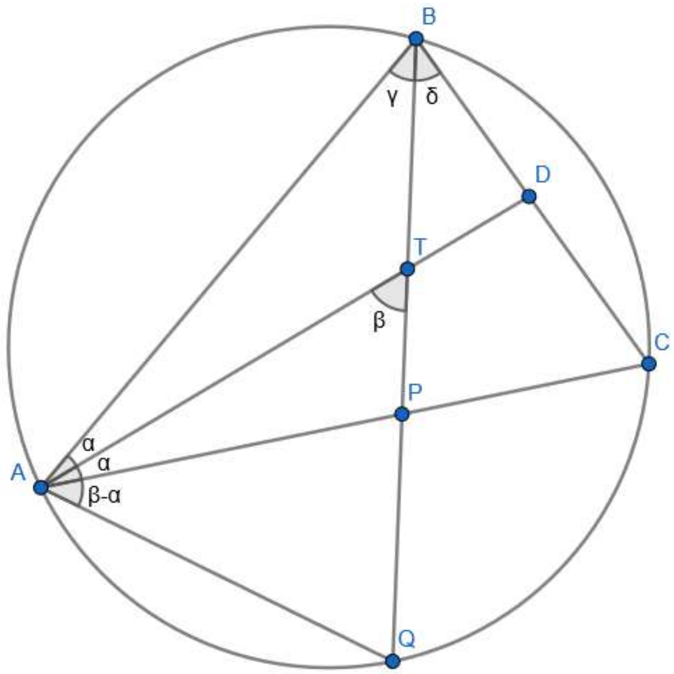
**Критерии.** Только ответ – 4 балла. Возможны другие доказательства того, что одно из четырех чисел обязательно равняется нулю.

5. [20 баллов] На биссектрисе $AD$ треугольника $ABC$ расположена точка $T$. Луч $BT$ пересекает прямую $AC$ и окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точках $P$ и $Q$ соответственно (точка $Q$ отличается от точек $A, B$ и $C$). Известно, что $AQ = TQ$.

а) Докажите, что $BP$ – биссектриса треугольника $ABC$.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AP = 2, CP = 6$ и радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 5.

**Решение.**




а) Положим $\angle BAD = \alpha, \angle ATP = \beta, \angle ABQ = \gamma$ и $\angle CBQ = \delta$. Так как $AD$ – биссектриса треугольника $ABC$, то $\angle CAD = \alpha$. Так как $AQ = TQ$, то треугольник $AQT$ является равнобедренным с основанием $AT$. Поэтому $\angle ATQ = \angle TAQ$, а значит, $\angle CAQ = \angle TAQ - \angle CAD = \beta - \alpha$. Угол $ATQ$ является внешним для треугольника $ABT$. Поэтому $\beta = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle CAQ = (\alpha + \gamma) - \alpha = \gamma$. Но вписанные углы $CAQ$ и $CBQ$ опираются на одну и ту же дугу. Откуда следует $\angle CAQ = \angle CBQ$, то есть $\gamma = \delta$. Это и доказывает, что $BP$ – биссектриса треугольника $ABC$.

б) Пусть $\angle ABC = \omega$. Из равенства $\frac{AC}{2\sin\angle ABC} = R$, где $R$ – радиус описанной окружности около треугольника $ABC$, получаем $\frac{2+6}{2\sin\omega} = 5$, то есть $\sin\omega = \frac{4}{5}$. Тогда находим $\cos\omega = \pm\sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \pm\frac{3}{5}$. Здесь берём знак “ + ”, если $\omega$ – не тупой угол и знак “ – ”, если $\omega$ – тупой угол. Согласно а) $BP$ – биссектриса треугольника $ABC$. По свойству биссектрисы для некоторого числа $t$ имеем $AB = AP \cdot t$ и $BC = CP \cdot t$, то есть $AB = 2t$ и $BC = 6t$. Тогда по теореме косинусов для треугольника $ABC$ получаем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$, а значит, $8^2 = (2t)^2 + (6t)^2 \mp 2 \cdot 2t \cdot 6t \cdot \frac{3}{5}$, $8^2 = \frac{4t^2}{5}(50 \mp 18)$ и $t^2 = \frac{8^2 \cdot 5}{4\cdot(50\mp18)}$, то есть $t^2 = \frac{5}{2}$ или $t^2 = \frac{20}{17}$.

Теперь находим площадь треугольника $ABC$ из равенств:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\omega = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot 6t \cdot \frac{4}{5} = \frac{24t^2}{5}.$$

Поэтому $S_{ABC} = \frac{24}{5} \cdot \frac{5}{2} = 12$ (при не тупом угле $\omega$) и $S_{ABC} = \frac{24}{5} \cdot \frac{20}{17} = \frac{96}{17}$ (при тупом угле $\omega$).

Ответ: б) 12 или $\frac{96}{17}$.

**Критерии.**

Полное решение – 7 баллов.

Рассмотрение частного случая в пункте а) – 0 баллов.

Решение только одного случая б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 2 балла;

Решение пункта а) – 2 балла;

Решение двух случаев пункта б) со ссылкой на нерешенный пункт а) – 3 балла;

Обоснованное решение одного случая из б) – 3 балла;

Верное решение пункта б) без ссылки на а) – 5 баллов;

Баллы, набранные за а) и б), складываются.

6. [20 баллов] Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На рёбрах $AB$ и $CD$ выбраны соответственно точки $P$ и $Q$ так, что $PQ \parallel AD$, причём $P$ и $Q$ не являются вершинами куба. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $PQ$ и образует с плоскостью $ABC$ угол $60°$.

а) Докажите, что отношение площади сечения куба плоскостью $\alpha$ к площади квадрата $ABCD$ менее 1,2.

б) Найдите расстояние от вершины $A_1$ до плоскости $\alpha$, если ещё известно, что $AB = 5$ и $AP = \sqrt{3}$.

**Решение.**

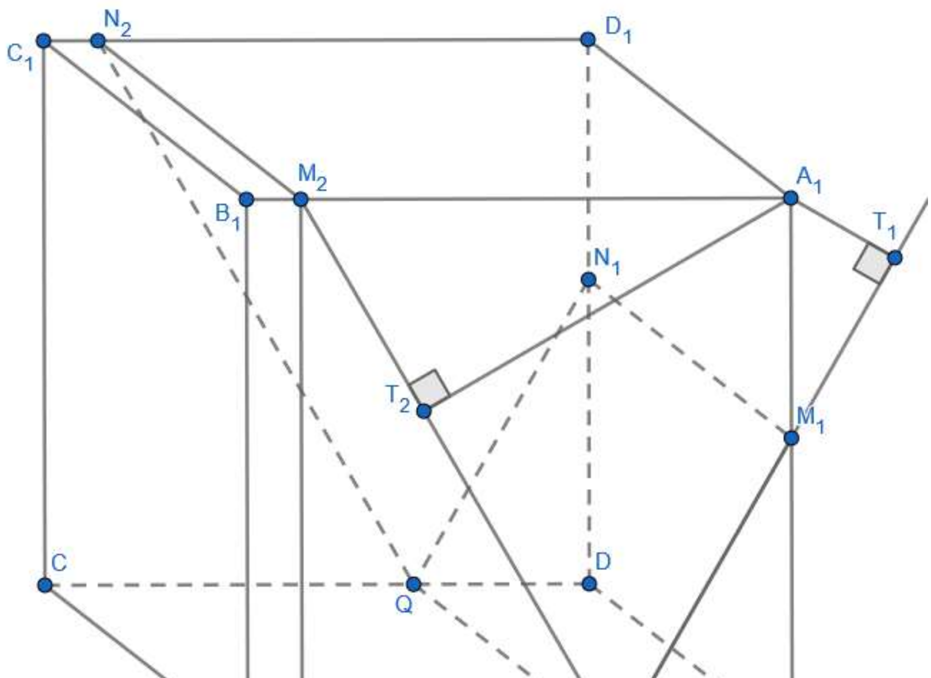
а) Плоскость $\alpha$ пересекает параллельные плоскости $ABB_1$ и $CDD_1$ по параллельным прямым. Так как прямая $PQ$ параллельна каждой из трёх плоскостей $ADD_1$, $BCC_1$ и $A_1B_1C_1$, то $\alpha$ пересекает грань, принадлежащую одной из этих плоскостей, по прямой, параллельной к $PQ$. Пусть это прямая $MN$ (точки $M$ и $N$ лежат на рёбрах куба, причём $M$ лежит на одном из рёбер $AA_1, A_1B_1$ или $BB_1$). Четырёхугольник $PMNQ$ является сечением куба плоскостью $\alpha$. Имеем $PM \parallel QN$, $PQ \parallel MN$ и $PQ \perp PM$ (обе указанные параллельности следуют из выше приведённых рассуждений, а перпендикулярность следует из того, что $PQ$ параллельна прямой $AD$, которая перпендикулярна плоскости $ABB_1$). Поэтому $PMNQ$ – прямоугольник. Полагая, что $a$ – длина стороны куба, имеем $S_{PMNQ} = PM \cdot PQ = PM \cdot a$ и $S_{ABCD} = a^2$. Тогда отношение площадей сечения и квадрата $ABCD$ будет равно $\frac{PM}{a}$.

Далее, так как $PQ$ – линия пересечения плоскостей $\alpha$ и $ABC$, $PQ \perp AB$ и $PQ \perp PM$, то угол между прямыми $AB$ и $PM$ равен углу между плоскостями $\alpha$ и $ABC$, то есть равен $60°$. Пусть $M_0$ – проекция точки $M$ на прямую $AB$. Тогда треугольник $MPM_0$ является прямоугольным, причём $\angle MPM_0 = 60°$. Откуда находим $PM = \frac{MM_0}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3} MM_0$. Ясно, что отрезок $MM_0$, лежащий на грани $ABB_1A_1$ и перпендикулярный к $AB$ не может иметь длину более стороны квадрата $ABB_1A_1$, то есть $MM_0 \le a$. Поэтому для искомого отношения площадей получаем:

$$\frac{PM}{a} \le \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} < \frac{2\sqrt{3{,}24}}{3} = \frac{2 \cdot 1{,}8}{3} = 1{,}2.$$

б) Согласно а) прямоугольник $PMNQ$ является сечением куба плоскостью $\alpha$ и угол между прямыми $AB$ и $PM$ равен $60°$. Так как $PQ \parallel AD$ и $AD \perp ABB_1$, то $PQ \perp ABB_1$, а значит $\alpha \perp ABB_1$. Линией пересечения $\alpha$ и $ABB_1$ является прямая $PM$. Так как $A_1$ лежит в плоскости $ABB_1$, то перпендикуляр $A_1T$, проведённый к прямой $PM$, является перпендикуляром к плоскости $\alpha$ (здесь полагаем, что точка $T$ лежит на прямой $PM$). Поэтому согласно условию задания нам нужно найти длину отрезка $A_1T$.

Замечаем, что возможны два различных сечения куба в соответствии с условием задания. На рисунке показаны эти сечения $PM_1N_1Q$ и $PM_2N_2Q$, а также $T_1$ и $T_2$ – основания перпендикуляров, проведённых из точки $A_1$ к прямым $PM_1$ и $PM_2$ соответственно. Согласно выше приведённым рассуждениям нам нужно найти длины отрезков $A_1T_1$ и $A_1T_2$.




Из $\angle APM_1 = 60°$ следует $\angle A_1M_1T_1 = \angle AM_1P = 30°$. В треугольнике $APM_1$ имеем $AM_1 = AP \cdot \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, а значит, $A_1M_1 = AA_1 - AM_1 = 5 - 3 = 2$. В треугольнике $A_1M_1T_1$ находим $A_1T_1 = 1$.

Далее, пусть $F$ – проекция точки $M_2$ на прямую $AB$. Из треугольника $PM_2F$ в силу $M_2F = 5$ и $\angle FPM_2 = 60°$ находим $FP = 5 \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Тогда $AF = AP + FP =$

$= \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Откуда $A_1M_2 = AF = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ и из $\angle A_1M_2T_2 = \angle A_1M_2P = \angle FPM_2 = 60°$ находим $A_1T_2 = A_1M_2 \cdot \sin 60° = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

Ответ: б) 1 или 4.

**Комментарий к заданию 6.**

Полное решение – 7 баллов.

Рассмотрение частного случая в пункте а) – 0 баллов.

Решение пункта а) – 2 балла;

Обоснованное решение одного случая из б) – 3 балла;

Верное решение пункта б) – 5 баллов;

Баллы, набранные за а) и б), складываются.