

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2023/2024 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [15 баллов] Решите неравенство

$$|x\sqrt{5+x}| \geq x+3.$$

2. [15 баллов] Решите уравнение

$$\log_x(2x-1) \log_{2x-1}(3x-2) \log_{3x-2}(4x-3) \dots \log_{2023x-2022}(2024x-2023) = 2.$$

3. [15 баллов] Найдите все действительные решения уравнения

$$y^2 - 2y \sin(xy) + 1 = 0.$$

4. [15 баллов] Найдите все целочисленные решения (x,y) уравнения

$$x(x+1) = 4y(y+1).$$

5. [20 баллов] На биссектрисе AD треугольника ABC расположена точка T . Луч BT пересекает прямую AC и окружность, описанную около треугольника ABC , в точках P и Q соответственно (точка Q отличается от точек A, B и C). Известно, что $AQ = TQ$.

а) Докажите, что BP – биссектриса треугольника ABC .

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 2$, $CP = 6$ и радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 5.

6. [20 баллов] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На рёбрах AB и CD выбраны соответственно точки P и Q так, что $PQ \parallel AD$, причём P и Q не являются вершинами куба. Плоскость α содержит прямую PQ и образует с плоскостью ABC угол 60° .

а) Докажите, что отношение площади сечения куба плоскостью α к площади квадрата $ABCD$ менее 1,2.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости α , если ещё известно, что $AB = 5$ и $AP = \sqrt{3}$.