

**КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ОТКРЫТАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА**  
**ПО МАТЕМАТИКЕ**

Задания заключительного этапа

**Критерии проверки заданий 1 – 4:**

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. [10 баллов] Решите неравенство:

$$\frac{|x^2 - x - 9| - 3}{\sqrt{x^3 + 27}} \leq 0.$$

**Решение.**

Учитывая, что  $x^3 + 27 > 0$ ,  $x > -3$ , умножим обе части неравенства на положительную величину  $\sqrt{x^3 + 27}$ .

$$|x^2 - x - 9| - 3 \leq 0,$$

$$|x^2 - x - 9| \leq 3,$$

$$-3 \leq x^2 - x - 9 \leq 3.$$

Данное двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 9 \geq -3, \\ x^2 - x - 9 \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - x - 12 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 3)(x + 2) \geq 0, \\ (x - 4)(x + 3) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty), \\ x \in [-3; 4]. \end{cases}$$

Значит,  $x \in [-3; -2] \cup [3; 4]$ .

Учитывая ОДЗ, получаем, что  $x \in (-3; -2] \cup [3; 4]$ .

Ответ:  $x \in (-3; -2] \cup [3; 4]$ .

### Критерии оценивания задания 1:

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением точки  $(x_0 = -3)$ , – 7 баллов.

2. [10 баллов] Решите уравнение:

$$4 \sin 3x \cos 8x \cos 11x + \sin 16x = 0.$$

**Решение.**

$$4 \sin 3x \cos 8x \cos 11x + \sin 16x = 0,$$

$$\cos 8x (4 \sin 3x \cos 11x + 2 \sin 8x) = 0,$$

$$\cos 8x (2(\sin 14x - \sin 8x) + 2 \sin 8x) = 0,$$

$$\cos 8x \sin 14x = 0,$$

$$\cos 8x = 0 \text{ или } \sin 14x = 0,$$

$$\cos 8x \sin 14x = 0,$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \text{ или } 14x = \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in Z \text{ или } x = \frac{\pi k}{14}, k \in Z$$

Полученные множества решений не пересекаются. Действительно, уравнение

$$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} = \frac{\pi k}{14}, 7 + 14n = 8k,$$

$$8k - 14n = 7,$$

не имеет решений в целых числах (левая часть уравнения – чётное число, правая – нет).

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in Z \text{ или } x = \frac{\pi k}{14}, k \in Z.$$

### Критерии оценивания задания 2:

Вынесен общий множитель  $\cos 8x$  и правильно решено уравнение  $\cos 8x = 0$  – 4 балла.

3. [10 баллов] Решите неравенство

$$2^{2x^2+2} - 17 \cdot 2^{x^2+2} < -64.$$

**Решение.** Преобразуем неравенство:

$$\left(2^{x^2+1}\right)^2 - 34 \cdot 2^{x^2+1} + 64 < 0.$$

Тогда

$$2 \leq 2^{x^2+1} < 2^5,$$

$$1 < x^2 + 1 < 5,$$

$$0 < x^2 < 4.$$

Получаем:  $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ .

Ответ:  $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ .

### **Критерии оценивания задания 3:**

Неравенство путём замены переменных сведено к квадратному – 4 балла.

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением точек  $-2$ ,  $0$  или  $2$ , – снять 2 балла за каждое включение.

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$(x^2 - 4)\lg(x - 2) - (x - 2)\lg(x - 2) \geq \lg(x - 2)^{18}.$$

**Решение.** Область допустимых значений неравенства:  $x > 2$ . Получаем:

$$x^2 \lg(x - 2) - 4\lg(x - 2) - x\lg(x - 2) + 2\lg(x - 2) - 18\lg|x - 2| \geq 0,$$

$$x^2 \lg(x - 2) - x\lg(x - 2) - 20\lg(x - 2) \geq 0,$$

$$(x^2 - x - 20)\lg(x - 2) \geq 0,$$

$$(x - 5)(x + 4)\lg(x - 2) \geq 0.$$

Так как  $x > 2$ , выражение  $x + 4 > 6$ .

$$(x - 5)\lg(x - 2) \geq 0,$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 5 \leq 0, \\ \lg(x - 2) \leq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x - 5 \geq 0, \\ \lg(x - 2) \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x \leq 5, \\ x \leq 3, \\ x \geq 5, \\ x \geq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ получаем:  $x \in (2, 3] \cup [5, +\infty)$ .

Ответ:  $x \in (2, 3] \cup [5, +\infty)$ .

#### Критерии оценивания задания 4:

Потеряна часть решения  $x \in (2; 3]$  – не более 5 баллов.

Не учтена ОДЗ – снять 4 балла.

#### Критерии оценивания выполнения заданий по геометрии.

Задание по геометрии состоит из двух частей, в которых требуется доказать утверждение, сформулированное в пункте *а*, и обоснованно получить верный ответ в ходе решения задачи пункта *б*. Все баллы, полученные за выполнение пункта *а* и за выполнение пункта *б*, складываются. Наивысшая оценка за решение геометрического задания (как по планиметрии, так и по стереометрии) 15 баллов.

| Содержание критерия оценивания выполнения пункта <i>а</i>                                                                     | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство                                                                                                 | 7     |
| Имеется доказательство с незначительным недочётом в ходе рассуждений                                                          | 6     |
| Имеется в целом верное доказательство с незначительными недочётами                                                            | 5     |
| Имеется негрубая ошибка, но идея доказательства верная и все его ключевые моменты достаточно аргументированы                  | 4     |
| Имеется негрубая ошибка, а также незначительные недочёты в ходе рассуждений, но идея доказательства верная и все его ключевые | 3     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| моменты аргументированы                                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |
| Имеется ошибка, связанная с неполным описанием возможных случаев или содержащая какой-то другой серьёзный логический недостаток, возможно, при этом также допущены незначительные недочёты. Идея доказательства в рассматриваемом случае в целом верная и рассматриваемые ключевые моменты аргументированы | 2 |
| Имеется доказательство только для частного случая.                                                                                                                                                                                                                                                         | 1 |
| Доказательство утверждения пункта <i>a</i> отсутствует либо не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                    | 0 |

| Содержание критерия оценивания выполнения пункта <i>б</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ с учётом выполнения следующего требования (*): в ходе рассуждений либо не использовано утверждение пункта <i>a</i> , либо использовано, но при этом выполнение пункта <i>a</i> оценено не менее трёх баллов или в пункте <i>a</i> приведено полное доказательство частного случая, когда выполнены условия пункта <i>б</i> | 8     |
| В целом обоснованно с незначительной погрешностью в ходе рассуждений получен верный ответ, требование (*) выполнено                                                                                                                                                                                                                                         | 7     |
| В целом обоснованно с незначительными погрешностями в ходе рассуждений получен верный ответ, требование (*) выполнено                                                                                                                                                                                                                                       | 6     |
| Получен верный ответ, при этом обоснование в целом полное, только не выполнено требование (*),<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, обоснование полное, требование (*) выполнено                                                                                                                                           | 5     |
| Получен верный ответ, при этом в обосновании допущена незначительная погрешность, а также не выполнено требование (*),<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, также в ходе обоснования имеется незначительная погрешность, но                                                                                                | 4     |

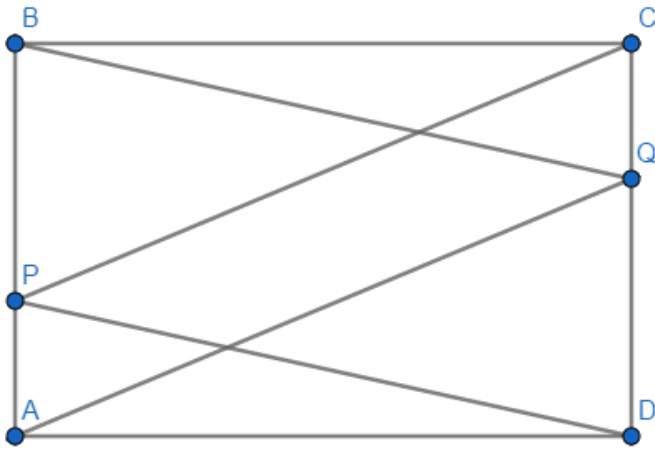
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| требование (*) выполнено                                                                                                                                                                                                                                                                                            |   |
| Получен верный ответ, при этом в обосновании допущены незначительные погрешности, а также не выполнено требование (*),<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, также в ходе обоснования имеются незначительные погрешности, но требование (*) выполнено                               | 3 |
| Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, при этом обоснование в целом полное, только не выполнено требование (*),<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за арифметических ошибок, также в ходе обоснования имеется незначительная погрешность, но требование (*) выполнено                         | 2 |
| Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, при этом в обосновании допущена незначительная погрешность, а также не выполнено требование (*),<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за арифметических ошибок, также в ходе обоснования имеются незначительные погрешности, но требование (*) выполнено | 1 |
| Решение задачи пункта б отсутствует либо не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                                | 0 |

5. [15 баллов] Около четырёхугольника  $ABCD$  описана окружность. Точки  $P$  и  $Q$  находятся на сторонах  $AB$  и  $CD$  соответственно, причём  $AQ \parallel CP$  и  $BQ \parallel DP$ .

а) Докажите, что  $AB = CD$ .

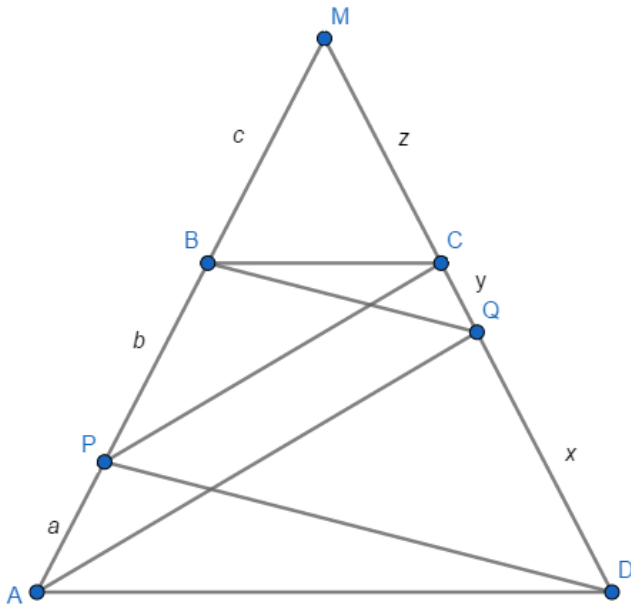
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника  $ABCD$ , если ещё известно, что  $AD = 2CD = 3BC = 6$ .

## Решение.



а) Рассмотрим случай, когда  $AB \parallel CD$ . Тогда  $APCQ$  и  $PBQD$  – параллелограммы, а значит  $AP = CQ$  и  $PB = QD$ . Откуда следует, что  $AB = AP + PB = CQ + QD = CD$ .

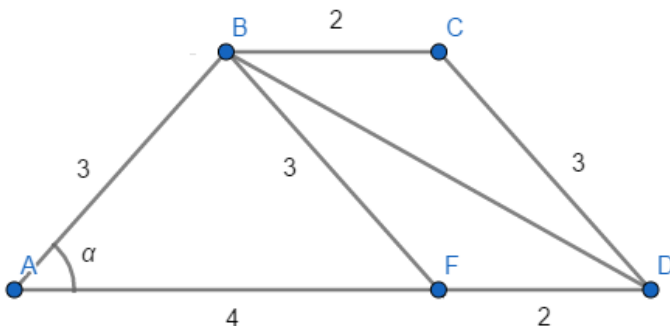
Теперь рассмотрим случай, когда прямые  $AB$  и  $CD$  не являются параллельными. Если мы докажем, что  $AD \parallel BC$ , то  $ABCD$  будет трапецией, вписанной в окружность, то есть – равнобедренной трапецией. Откуда получим  $AB = CD$ , что и докажет требуемое в пункте а).



Пусть  $M$  – точка пересечения прямых (рассматриваем ситуацию, когда  $M$  и четырёхугольник  $ABCD$  расположены в разных полуплоскостях относительно прямой  $BC$ , другая возможная ситуация относительно прямой  $AD$  рассматривается аналогично). Для удобства положим  $AP = a$ ,  $PB = b$ ,  $BM = c$  и  $DQ = x$ ,  $QC = y$ ,  $CM = z$ . Из  $AQ \parallel CP$  следует  $\triangle AMQ \sim \triangle PMC$ , а из  $BQ \parallel DP$  следует  $\triangle PMD \sim \triangle BMQ$ . Откуда  $\frac{AM}{PM} = \frac{MQ}{MC}$  и  $\frac{PM}{BM} = \frac{MD}{MQ}$ , то есть  $\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{y+z}{z}$  и  $\frac{b+c}{c} = \frac{x+y+z}{y+z}$ .

Перемножим левые и правые части этих двух равенств. Получим  $\frac{a+b+c}{c} = \frac{x+y+z}{z}$ , то есть  $\frac{AM}{BM} = \frac{MD}{MC}$ . Поэтому  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$  (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), а значит,  $\angle MAD = \angle MBC$ . Из равенства соответственных углов для прямых  $AD$ ,  $BC$  и секущей  $AM$  следует параллельность прямых  $AD$  и  $BC$ . Как было отмечено ранее, это уже доказывает требуемое в пункте а).

б) По доказанному в а) четырёхугольник  $ABCD$  либо прямоугольник (параллелограмм, вписанный в окружность), либо равнобедренная трапеция. Из условий  $AD = 6$ ,  $CD = 3$  и  $BC = 2$  следует, что  $ABCD$  – равнобедренная трапеция с основаниями  $AD = 6$ ,  $BC = 2$  и боковыми сторонами  $AB = CD = 3$ .



Прямая, проходящая через вершину  $B$  параллельно стороне  $CD$ ,

отсечёт треугольник  $ABF$ . Положим  $\angle BAD = \alpha$ . Тогда по теореме косинусов из треугольника  $ABF$  находим  $\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$ , то есть  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . В треугольнике  $ABD$  по теореме косинусов находим  $BD^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \alpha = 45 - 36 \cdot \frac{2}{3} = 21$ , а значит,  $BD = \sqrt{21}$ . И, наконец, замечая, что треугольник  $ABD$  вписан в окружность, описанную около трапеции  $ABCD$ , найдём радиус этой окружности:  $\frac{BD}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{21}{5}} = 0,3\sqrt{105}$ .

Ответ: б)  $0,3\sqrt{105}$ .

### Дополнительные критерии оценивания задания 5:

Наличие грубой ошибки либо отсутствие существенной части рассуждений в а) (либо в б)) не позволяет за а) (либо за б)) поставить более двух баллов.

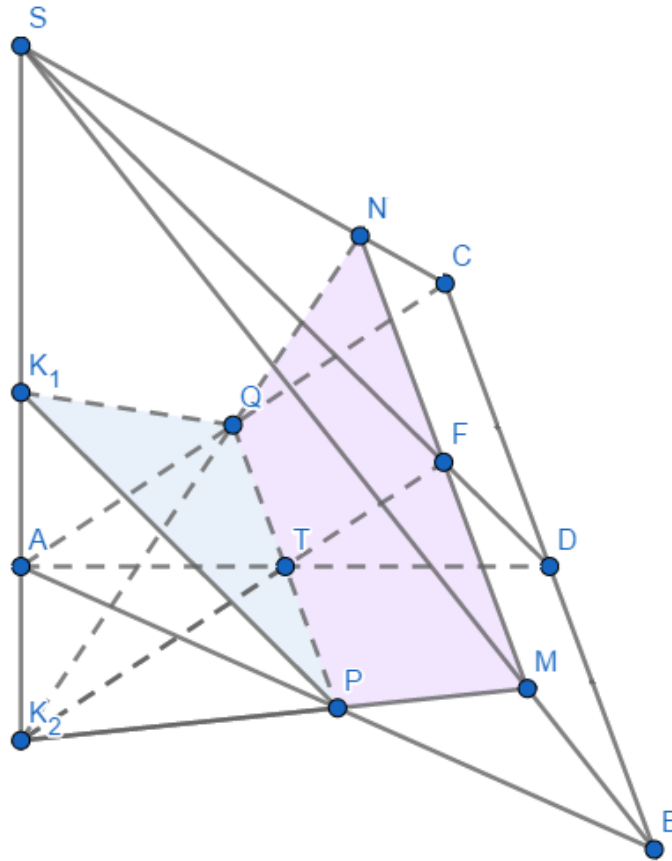
Негрубая ошибка не позволяет за а) ставить более четырёх баллов, а в б) – более пяти баллов.

6. [15 баллов] В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит равносторонний треугольник  $ABC$ . Прямая  $AS$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и на этой прямой расположена точка  $K$  так, что  $AK : AS : BS = 1 : 3 : 5$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $AB$  и  $AC$  соответственно.

а) Докажите, что угол между плоскостями  $ABC$  и  $KPQ$  равен  $30^\circ$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $KPQ$ , если ещё известно, что  $AK = 1$ .

**Решение.**



а) Пусть  $AK = t$ , тогда  $AS = 3t$  и  $BS = 5t$ . Согласно условию задания точка  $K$  может располагаться в двух местах – на месте точки  $K_1$  или точки  $K_2$ , где  $K_1$  принадлежит, а  $K_2$  не принадлежит отрезку  $AS$ , причём  $AK_1 = AK_2 = t$ . Если  $D$  – середина отрезка  $BC$ , то из  $AB = AC$  следует, что сторона  $BC$  и средняя линия  $PQ$  перпендикулярны  $AD$ , а также середина  $T$  отрезка  $PQ$  принадлежит  $AD$ . Так как  $AS \perp ABC$  и  $AK_1 = AK_2$ , то пирамиды  $K_1APQ$  и  $K_2APQ$  симметричны относительно плоскости  $ABC$ , а значит, углы, образованные боковыми гранями  $K_1PQ$  и  $K_2PQ$  с плоскостью основания  $APQ$  одинаковы. Другими словами, независимо от расположения точки  $K$  на месте  $K_1$  или на месте  $K_2$  угол между плоскостями  $ABC$  и  $KPQ$  определяется однозначно. Поэтому нам достаточно показать, что угол между плоскостями  $ABC$  и  $K_2PQ$  равен  $30^\circ$ . Плоскости  $ABC$  и  $K_2PQ$  пересекаются по прямой  $PQ$ . Так как  $AT \perp PQ$ , то по теореме о трёх перпендикулярах наклонная  $K_2T$  к плоскости  $APQ$  тоже будет перпендикулярна прямой  $PQ$ . Поэтому  $\angle ATK_2$  – это угол между плоскостями  $ABC$  и  $K_2PQ$ . Положим  $\angle ATK_2 = \alpha$ .

Далее, из прямоугольного треугольника  $BAS$  с учётом  $AS = 3t$  и  $BS = 5t$  находим  $AB = 4t$ . В равностороннем треугольнике  $ABC$  находим высоту  $AD = \frac{4t\sqrt{3}}{2} = 2t\sqrt{3}$ . Так как средняя линия  $PQ$  пересекает высоту  $AD$  в точке  $T$ , то  $T$  – середина отрезка  $AD$ , а значит,  $AT = \frac{AD}{2} = t\sqrt{3}$ . И, наконец, из прямоугольного треугольника  $ТАК_2$  находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AK_2}{AT}$ , то есть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{t\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Последнее и означает, что  $\alpha = 30^\circ$ .

б) Прямые  $K_2P$  и  $K_2Q$  пересекают прямые  $SB$  и  $SC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, то есть плоскости  $K_2PQ$  и  $SBC$  пересекаются по прямой  $MN$ . Прямая  $K_2T$  лежит на плоскости  $K_2MN$ , а значит, пересекает прямую  $MN$  в некоторой точке  $F$ . Плоскость  $K_2MN$ , проходящая через прямую  $PQ$ , параллельную плоскости  $SBC$ , пересекает  $SBC$  по прямой  $MN$ , параллельной  $PQ$ . Сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $K_1PQ$  представляет собой треугольник  $K_1PQ$ , а сечение её плоскостью  $K_2PQ$  представляет собой трапецию  $MPQN$ . Замечаем, что в силу симметричности пирамид  $K_1APQ$  и  $K_2APQ$  относительно плоскости  $ABC$  площади треугольников  $K_1PQ$  и  $K_2PQ$  равны. По условию задания в пункте б) нам требуется найти площади треугольника  $K_2PQ$  и трапеции  $MPQN$ . Рассмотрим равнобедренный треугольник  $K_2MN$  (учитываем, что он симметричен относительно плоскости  $ASD$ ). По условию  $t = AK_2 = 1$ , а значит согласно а) имеем  $AS = 3$ ,  $BS = 5$ , а также  $AB = 4$ ,  $PQ = 2$  и  $AT = \sqrt{3}$ . Откуда из прямоугольного треугольника  $ТАК_2$  находим  $K_2T = \sqrt{1+3} = 2$ . Так как  $K_2T \perp PQ$ , то  $S_{K_2PQ} = \frac{PQ \cdot K_2T}{2} = 2$ . Далее, из прямоугольного треугольника  $BSD$  находим  $SD = \sqrt{BS^2 - BD^2}$ , а значит, ввиду  $BS = 5$  и  $BD = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} = 2$  получаем  $SD = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$ . Из прямоугольного треугольника  $SAD$  при  $\beta = \angle ASD$  находим  $\cos \beta = \frac{AS}{SD} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$  и поэтому  $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ . Из треугольника  $K_2FS$  по теореме синусов имеем  $\frac{K_2F}{\sin \beta} = \frac{K_2S}{\sin(\beta + 60^\circ)}$  (учли, что по доказанному в а)  $\angle SK_2F = 90^\circ - \angle ATK_2 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ , а значит  $\sin \angle SFK_2 = \sin(180^\circ - (\beta + 60^\circ)) = \sin(\beta + 60^\circ)$ ).

Так как  $\sin(\beta + 60^\circ) = \sin \beta \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos \beta = \frac{2}{2\sqrt{7}} + \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ , то в силу  $K_2S = AK_2 + AS = 4$  получаем  $K_2F = \frac{K_2S \cdot \sin \beta}{\sin(\beta + 60^\circ)}$ , то есть  $K_2F = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{5} = \frac{16}{5}$ . Замечаем, что треугольник  $K_2MN$  подобен треугольнику  $K_2PQ$  с коэффициентом  $k = \frac{K_2F}{K_2T} = \frac{\frac{16}{5}}{2} = \frac{8}{5}$ . Поэтому площадь треугольника  $K_2MN$  равна  $S_{K_2PQ} \cdot k^2 = 2 \cdot \frac{64}{25} = 5,12$ . Откуда окончательно получаем  $S_{MPQN} = S_{K_2MN} - S_{K_2PQ} = 5,12 - 2 = 3,12$ .

Ответ: б) 2 или 3,12.

### Дополнительные критерии оценивания задания 6:

Если из двух случаев расположения точки  $K$  рассмотрен только один, то и в а) и в б) не более двух баллов.

7. [15 баллов] Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых общие решения неравенств  $x^2 - 2x + a \leq 0$  и  $x^2 + 4x \leq 2a + 13$  образуют на числовой оси отрезок длины 1.

**Решение.** Множество решений первого неравенства – отрезок  $1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}$  с центром  $x=1$ , множество решений второго неравенства – отрезок  $-2 - \sqrt{17+2a} \leq x \leq -2 + \sqrt{17+2a}$  с центром  $x=-2$ .

Пересечение этих отрезков может быть отрезком длины 1 только в трех случаях.

1) Оба отрезка-решения имеют длины не менее 1 и правый конец левого отрезка находится справа от левого конца правого отрезка на расстоянии 1:

$$\begin{cases} 2\sqrt{17+2a} \geq 1, \\ 2\sqrt{1-a} \geq 1, \\ -2 + \sqrt{17+2a} - 1 + \sqrt{1-a} = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение  $a = -8$ .

2) Левый отрезок с центром  $x=-2$  имеет длину 1, а правый отрезок его накрывает:

$$\begin{cases} 2\sqrt{17+2a} = 1, \\ 1 - \sqrt{1-a} \leq -2,5. \end{cases}$$

Здесь решение первого уравнения  $a = -\frac{67}{8}$  не удовлетворяет второму неравенству:

$$1 - \sqrt{1 + \frac{67}{8}} = 1 - \sqrt{\frac{75}{8}} > -2,5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{75}{8}} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{75}{8} < \frac{49}{4} = \frac{98}{8}.$$

3) Правый отрезок с центром  $x=1$  имеет длину 1, а левый отрезок его накрывает:

$$\begin{cases} 2\sqrt{1-a} = 1, \\ -2 + \sqrt{17+2a} \geq 1,5. \end{cases}$$

Здесь решение первого уравнения  $a = \frac{3}{4}$  удовлетворяет второму неравенству:

$$-2 + \sqrt{17 + \frac{3}{4}} = -2 + \sqrt{\frac{37}{2}} > 1,5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{37}{2}} > \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{37}{2} > \frac{49}{4} \Leftrightarrow \frac{74}{4} > \frac{49}{4}.$$

Ответ:  $a = -8$  или  $a = \frac{3}{4}$ .

**Критерии оценивания задания 7.** Полным баллом оцениваются аргументированные рассуждения, включая обоснованные решения уравнений, а также убедительные обоснования необходимых неравенств. Угаданные верные значения параметра положительно не оцениваются. Небольшие подвижки в исследовании значений параметра, удовлетворяющих требованию задачи, оцениваются одним-двумя баллами. Наличие в ответе лишних значений параметра считается грубой ошибкой в исследовательской задаче.

8. [15 баллов] Найдите все пары чисел  $(x, y)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{6}{f(x)-4} + \frac{1}{f(y)-1} = 2, \\ ((f(y)-1)(f(x)-4) = 6f(y)-6, \end{cases}$$

где  $f$  – определенная на всей числовой оси четная периодическая функция с периодом  $T=2$ , причем  $f(x)=10x$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Решение. Поскольку знаменатели в первом уравнении не должны обращаться в ноль, то из второго уравнения следует только  $f(x)=10$ , а тогда из первого уравнения находим  $f(y)=2$ . Учитывая четность функции  $f$ , доопределим ее на отрезке  $-1 \leq x \leq 0$  равенством  $f(x)=-10x$ , то есть  $f(x)=10|x|$  на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ . Длина последнего отрезка есть период данной функции. Тем самым это кусочно-линейная непрерывная функция, определенная на всей действительной оси. Значение 10 она принимает в точках  $x=1+2n$  для всех целых  $n$ , однако, учитывая условие задачи  $x \geq 0$ , следует указать в ответе неотрицательные значения  $n$ . Уравнение  $f(y)=2$  на отрезке  $-1 \leq y \leq 1$  имеет вид  $10|y|=2$ , то есть  $y=\pm 0,2$ . Поскольку по условию задачи  $y \leq 0$ , то с учетом периодичности получаем два семейства значений  $y$ , которые указаны в ответе.

Ответ:  $(1+2n; -1,8-2l), (1+2n; -0,2-2l), \quad n, l = 0, 1, 2, \dots$

**Критерии оценивания задания 8.** Обоснованно найденные уравнения  $f(x)=10$  и  $f(y)=2$  оцениваются в 5 баллов. Верное описание функции  $f$  на всей вещественной оси оценивается также в 5 баллов. Обоснованный верный ответ оценивается в 15 баллов. Мелкие недочеты в обоснованиях могут снижать соответствующие оценки на 1-2 балла.