Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2024/2025 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [15 баллов] Садовник выкладывает на прилавок собранный урожай из 48 яблок в ряд. Он готов отдать 47 из них своим помощникам, но себе планирует оставить единственное найденное золотое яблоко (редкий сорт с особым оттенком кожуры). Раздачу яблок он решил провести за несколько шагов: на каждом шаге один из помощников говорит, какое по счёту с края яблоко он хочет забрать, а садовник решает, с какого края считать. Найдите все возможные начальные положения золотого яблока, при которых садовник может гарантировать, что оно достанется ему вне зависимости от действий помощников.

Решение. Садовнику придётся отдать золотое яблоко, если в какой-то момент оно окажется в середине ряда. До тех пор, пока помощники не извлекут из ряда 47 яблок, в этом ряду в любой момент времени будет не менее 2 яблок, следовательно крайнее яблоко можно сохранить до конца. Следовательно, если золотое яблоко будет с краю, то садовник сможет сохранить его до конца раздачи – если на очередном шаге помощник будет называть число 1 или число, равное количеству яблок на столе, садовник извлекать яблоко с противоположного от золотого яблока края.

Рассмотрим ситуацию, когда золотое яблоко находится не с краю. В данном случае у помощников, есть выигрышная (кооперативная) стратегия, позволяющая им забрать яблоко.

Стратегия. Каждый шаг соответствующий помощник называет любое число, отличное от 1 и от числа яблок на столе (чтобы исходные крайние яблоки оставались на столе). Когда останется три яблока, золотое яблоко (если оно ещё будет на столе) окажется в центре. Следующий помощник назовёт число 2.

Ответ: с одного из краёв.

Комментарий.

Сказано, что если яблоко находится в центре, то помощник сможет его забрать – 4 балла.
Приведена стратегия за помощников садовника, позволяющая забрать им любое яблоко, которое находится не по краям рассматриваемого ряда – 7 баллов.
Доказано, что если яблоко находится с краю, то садовник сможет гарантированно его забрать – в случае, если будет придерживаться оптимальной стратегии – 8 баллов.

2. [15 баллов] Решите уравнение

$$\left(x^2+x-2\right)^3+\left(2x^2-7x+5\right)^3=27\left(x-1\right)^6.$$

Решение. Пусть $a=x^2+x-2$, $b=2x^2-7x+5$. Заметим, что $27\left(x-1\right)^6=\left(3x^2-6x+3\right)^3$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)^3.$$

Упрощая, получаем

$$a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$3ab\left(a+b\right)=0.$$

Таким образом, решение исходного уравнения – объединение множеств решений каждого из уравнений $x^2+x-2=0$ (решения: $x=1$, $x=-2$), $2x^2-7x+5=0$ (решения: $x=1$, $x=5/2$), $3x^2-6x+3=0$ (решение: $x=1$).

Ответ: –2, 1, 5/2.

Комментарий.

За каждый корректно найденный корень начисляется 5 баллов.

3. [15 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^4x+\sin^6x+\cos^6x+\cos^4x=\dfrac{17}{16}\sin y,\\ 3\sin z+5\cos^2y+3=0.\end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что

$$3(\sin z+1)=-5\cos^2y\le 0.$$

Так как $\sin z+1\ge 0$, то $5\cos^2y=0$ и $\sin z=-1$. Значит, $z=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Из равенства $5\cos^2y=0$ следует, что $\sin y=1$ или $\sin y=-1$. Но если $\sin y=-1$, то в первом уравнении левая часть неотрицательна, а правая меньше нуля.

Значит, $\sin y=1$ и $y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$.

Тогда рассмотрим первое уравнение системы:

$$\sin^4x+\sin^6x+\cos^6x+\cos^4x=\frac{17}{16}.$$

Зная, что $\sin^2x+\cos^2x=1$, возведём обе части основного тригонометрического тождества в квадрат. Получим, $\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x+\cos^4x=1$ или $\sin^4x+$ $+\cos^4x=1-\frac{1}{2}\sin^22x$.

Теперь возведём обе части основного тригонометрического тождества в куб. Получим $\sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x = 1$. Откуда, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - -3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

$$\sin^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = \frac{17}{16}.$$

Из последнего равенства следует, что $\sin^2 2x = \frac{3}{4}, \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, x = = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: Все тройки (x, y, z), где $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, k, m, n \in \mathbb{Z}$.

Комментарий.

Показано, что сумма $(\sin^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x)$ может быть сведена к выражению, зависящему от одной величины – 6 баллов.

4. [15 баллов] На технологическую конференцию приехали несколько проектных команд, в каждой из которых был один руководитель, один архитектор и не более 10 разработчиков. Организатор хакатона выбирал для демонстрации прототипа одного руководителя, одного архитектора и одного разработчика из трёх разных команд. Оказалось, что у него было ровно 4550 способов сформировать такую демонстрационную группу. Сколько всего разработчиков могло быть на этой конференции?

Решение. Пусть на хакатон приехало n команд, в которых суммарно k разработчиков. Тогда организатор может составить команду $k(n-1)(n-2)$ способами (сначала выбирает произвольного разработчика, потом произвольного руководителя – не из команды разработчика, потом произвольного архитектора – не из команд выбранного разработчика и руководителя), а также $k \le 10n$. Тогда, так как $k(n-1)(n-2) = 4550$, то

$$10n^3 > 4550,$$
$$n^3 > 455,$$
$$n > \sqrt[3]{455}.$$

Так как, $7^3 < 455 < 8^3$ и n – натуральное число, получаем, что $n \ge 8$.

Заметим, что $4550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ и это число кратно $(n-1)$ и $(n-2)$ – двум натуральным числам, отличающимся на 1. Натуральными делителями числа 4550, отличающимися на 1, наименьшее из которых не меньше 6 (из $n \ge 8$ следует, что $n - 2 \ge 6$) могут быть только 13 и 14. Следовательно, на конференцию всего приехало $4550/(13 \cdot 14) = 25$ разработчиков.

Ответ: 25.

Комментарий.

Получено выражение $k(n-1)(n-2) = 4550$ или любой его аналог – не менее 5 баллов. Никак не рассмотрен (и не исключён) случай, когда $n = 3$ – не более 14 баллов.

5. [20 баллов] Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, причём $\frac{AB}{BM} = \frac{CD}{CM} = k$ и $k > 1$.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите сторону BC, если ещё известно, что $AC = 11, BD = 10, AB = 5$ и $AM = 3$.

Решение.

а) Пусть $\angle AMB = \delta$, а также $\angle BAM = \alpha$ и $\angle CDM = \beta$. Ясно, что $\angle CMD = \angle AMB = \delta$ (вертикальные). Так как $AB > BM$ и $CD > CM$, то углы α и β соответственно в треугольниках ABM и DCM являются острыми. Применяя теорему синусов для этих треугольников, с одной стороны получаем $\frac{AB}{\sin\delta} = \frac{BM}{\sin\alpha}$, т. е. $k = \frac{AB}{BM} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$, а значит, $\sin\alpha = \frac{\sin\delta}{k}$, а с другой стороны получаем $\frac{CD}{\sin\delta} = \frac{CM}{\sin\beta}$, т. е. $k = \frac{CD}{CM} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}$, а значит, $\sin\beta = \frac{\sin\delta}{k}$. Таким образом, синусы острых углов α и β равны. Откуда следует $\alpha = \beta$. Поэтому точки A, B, C и D лежат на одной окружности, т. е. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

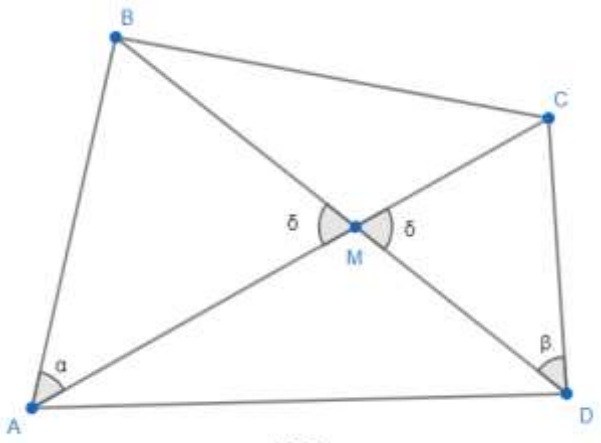

Рис. 1

б) Согласно доказанному в пункте а) около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Полагая $BM = x$, имеем $MD = BD - BM = 10 - x$. Используя соотношение отрезков пересекающихся хорд AC и BD окружности, получаем $AM \cdot CM = BM \cdot DM$, т. е. $3 \cdot (11-3) = x(10-x)$. Откуда следует $x^2 - 10x + 24 = 0$ и $x = 4$ или $x = 6$. По условию $\frac{5}{x} = \frac{AB}{BM} = k$ и $k > 1$. Поэтому нам подходит только $x = 4$. Но тогда $AB = 5, AM = 3$ и $BM = 4$, т. е. треугольник ABC является египетским прямоугольным треугольником. Откуда следует $\angle AMB = 90°$, а значит $\angle BMC = 90°$. Из прямоугольного треугольника BMC находим $BC^2 = BM^2 + CM^2$, т. е. $BC = \sqrt{4^2 + (11-3)^2} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: б) $4\sqrt{5}$.

Комментарий.

Полное решение – 20 баллов.

В пункте а) приведено верное доказательств – 7 баллов.

В пункте а), ссылаясь на недоказанное строго подобие треугольников ABM и DCM, показано, что $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, – 4 балла.

В пункте б) приведено верное решение со ссылкой на доказательство в пункте а):

1) в котором набрано менее 4-х баллов, – 7 баллов.
2) в котором набрано не менее 4-х баллов, – 13 баллов.

В пункте б) приведено верное решение, когда $BM = 4$, а также в рассуждениях не исключён случай, когда $BM = 6$, со ссылкой на доказательство в пункте а):

1) в котором набрано менее 4-х баллов, – 4 балла.
2) в котором набрано не менее 4-х баллов, – 7 баллов.

В пункте б) приведено верное решение без ссылки на доказательство в пункте а) – 13 баллов.

В пункте б) наряду с верным решением при $BM = 4$ приведено ещё постороннее решение при $BM = 6$, причём без ссылки на доказательство в пункте а) – 7 баллов.

Некоторые продвижения в доказательстве пункта а) или решении пункта б) могут быть оценены от 1 до 3 баллов.

Баллы, набранные за доказательство пункта а) и решение пункта б) складываются.

6. [20 баллов] Точка K лежит на грани $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и равноудалена от точек A, B и C. Через точку K параллельно прямой AC_1 проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AA_1.

б) Найдите длину отрезка пересечения плоскости α с гранью AA_1D_1D, если ещё известно, что $AA_1 = 24$, $AD = \frac{45}{7}$ и α пересекает прямую A_1B_1 в точке L такой, что $\frac{A_1L}{B_1L} = \frac{7}{2}$.

Решение.

а) Так как боковые рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 2) перпендикулярны основанию $A_1B_1C_1D_1$, то имеем три равных прямоугольных треугольника AA_1K, BB_1K и CC_1K (по катету и гипотенузе). Тогда $A_1K = B_1K = C_1K$, т. е. K – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника

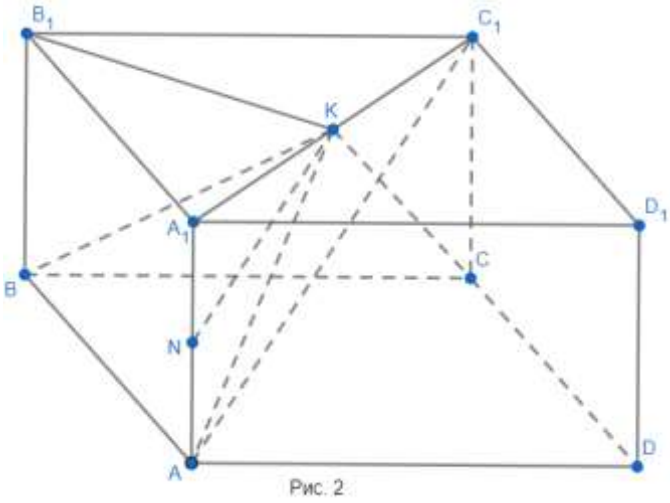

Рис. 2

$A_1B_1C_1$. Поэтому K – центр симметрии прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$. Далее, плоскость α проходит через точку K параллельно прямой AC_1, а значит, пересекает плоскость AA_1C_1 по прямой l, параллельно прямой AC_1. Пусть N – точка пересечения прямой l и стороны AA_1 в треугольнике AA_1C, т. е. l – это прямая KN и N – точка пересечения α с ребром AA_1. Так как K – середина стороны A_1C_1 и $KN \parallel AC_1$, то KN – средняя линия в треугольнике AA_1C_1, а значит, N – середина отрезка AA_1.

б) По условию $AA_1 = 24$, тогда по доказанному в а) $A_1N = 12$. Для точки L существуют два возможных расположения (см. рис. 3 и рис. 4). Пусть M – точка пересечения плоскости α с прямой A_1D_1.

В случае, когда точка L расположена на ребре A_1B_1 (рис. 3), полагаем, что Q – точка пересечения прямой LM с ребром C_1D_1 и P – точка пересечения прямой NM с ребром DD_1. Ясно, что плоскость α пересекает грань AA_1D_1D по отрезку NP, длину которого требуется найти.

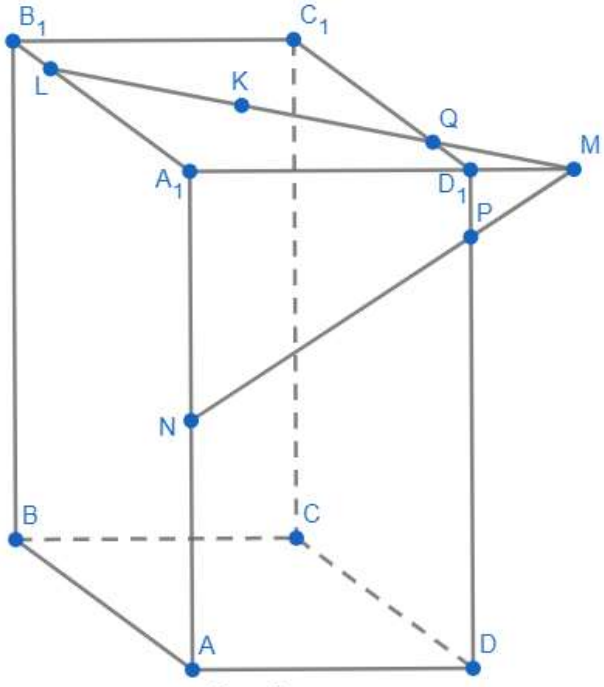

Рис. 3

Так как согласно доказанному в а) точка K является центром симметрии прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, то $B_1L = D_1Q$, а значит, имеем $\frac{7}{2} = \frac{A_1L}{B_1L} = \frac{A_1L}{D_1Q}$. В силу $A_1L \parallel D_1Q$ треугольники LA_1M и QD_1M подобны с коэффициентом $\frac{7}{2}$. Положим $D_1M = x$ и получим $\frac{7}{2} = \frac{A_1M}{D_1M} = \frac{\frac{45}{7}+x}{x} = \frac{45}{7x} + 1$, т. е. $\frac{45}{7x} = \frac{5}{2}$ и $x = \frac{18}{7}$. Откуда $A_1M = \frac{45}{7} + \frac{18}{7} = \frac{63}{7} = 9$. Из прямоугольного треугольника NA_1M находим $MN^2 = NA_1^2 + A_1M^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, т. е. $MN = 15$.

Из условия, $\frac{7}{2} = \frac{A_1M}{D_1M}$ и подобия

треугольников NA_1M и PD_1M (учли, что $NA_1 \parallel PD_1$) находим $\frac{MN}{MP} = \frac{7}{2}$, а значит, $MP = 2 \cdot \frac{MN}{7} = \frac{30}{7}$. Откуда окончательно в рассматриваемом случае получаем, что $NP = MN - NP = 15 - \frac{30}{7} = \frac{75}{7}$.

Рассмотрим случай, когда точка L расположена на прямой A_1B_1 вне отрезка A_1B_1 (рис. 4). Так как $\frac{A_1L}{B_1L} = \frac{7}{2}$, то L расположена на луче A_1B_1 за точкой B_1. Пусть $A_1M = y$, и T – точка пересечения прямой LK с ребром B_1C_1. Так как K – центр симметрии прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, то $B_1T = D_1M = A_1D_1 - A_1M = \frac{45}{7} - y$. Из подобия треугольников A_1LM и B_1LT с коэффициентом $\frac{7}{2}$ (учли, что $A_1M \parallel B_1T$) следует $\frac{7}{2} = \frac{A_1M}{B_1T} = \frac{y}{\frac{45}{7}-y}$, т. е. $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{45}{7} - y\right) = y$ и $\frac{45}{2} = \frac{9}{2}y$, а значит $y = 5$. Из прямоугольного треугольника NA_1M находим $MN^2 = NA_1^2 + A_1M^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, т. е. $MN = 13$. Замечаем, что MN – отрезок пересечения плоскости α и грани AA_1D_1D.

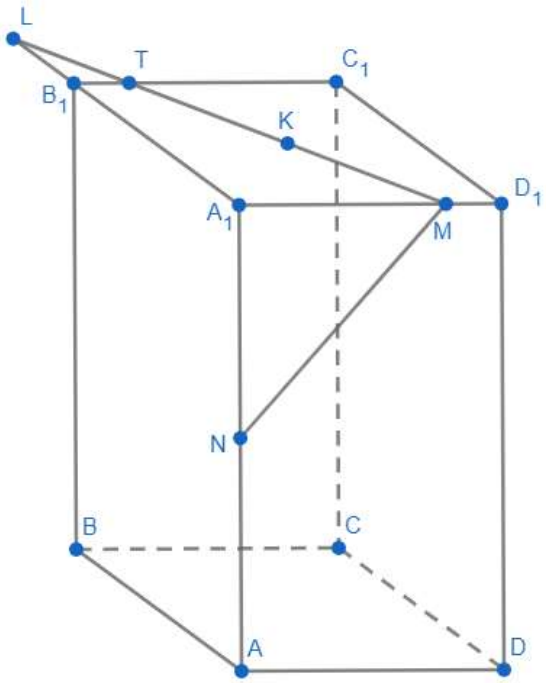

Рис. 4

Ответ: б) $\frac{75}{7}$ или 13.

Комментарий.

Полное решение – 20 баллов.

В пункте а) приведено верное доказательство – 7 баллов.

В пункте а) только доказано, что K – центр симметрии прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ – 4 балла.

В пункте б) приведено верное решение только для одного случая со ссылкой на доказательство в пункте а):

1) в котором набрано менее 4-х баллов, – 4 балла.
2) в котором набрано не менее 4-х баллов, – 7 баллов.

В пункте б) приведено верное решение для двух случаев со ссылкой на доказательство в пункте а):

1) в котором набрано менее 4-х баллов, – 7 баллов.
2) в котором набрано не менее 4-х баллов, – 13 баллов.

В пункте б) приведено верное решение для одного случая без ссылки на доказательство в пункте а) – 7 баллов.

В пункте б) приведено верное решение для двух случаев без ссылки на доказательство в пункте а) – 13 баллов.

Некоторые продвижения в доказательстве пункта а) или решении пункта б) могут быть оценены от 1 до 3 баллов.

Баллы, набранные за доказательство пункта а) и решение пункта б) складываются.