

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2024/2025 учебный год

Задания отборочного этапа

Критерии проверки заданий:

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. [10 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2(1 + \cos^2 x)} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} = \sqrt{10}.$$

Решение.

Введём обозначения $a = \sqrt{2(1 + \cos^2 x)}$ и $b = \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$. Тогда исходное уравнение примет вид $a + b = \sqrt{10}$. Заметим также, что $a^2 + b^2 = 2(1 + \cos^2 x) + 1 + 2\sin^2 x = 5$. Но тогда $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 10 - 5 = 5$. И $ab = \frac{5}{2}$. Запишем последнее равенство ещё раз, подставив вместо a и b соответствующие выражения.

$$\sqrt{2(1 + \cos^2 x) \cdot (1 + 2\sin^2 x)} = \frac{5}{2}$$

$$2(1 + \cos^2 x) \cdot (1 + 2\sin^2 x) = \frac{25}{4}$$

$$8(1 + (1 - \sin^2 x))(1 + 2\sin^2 x) = 25$$

$$8(-2\sin^4 x + 3\sin^2 x + 2) = 25$$

$$-16\sin^4 x + 24\sin^2 x - 9 = 0$$

$$(4\sin^2 x - 3)^2 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m; n, m \in \mathbb{N}$.

2. [10 баллов] На доску $N \times N$ клеток ($N \geq 3$) ставят двух одинаковых ферзей так, что они не атакуют друг друга. Докажите, что число таких расстановок кратно 4.

Решение.

Будем называть расстановку ферзей «хорошей», если ферзи расположены не симметрично друг другу относительно центра доски. Заметим, что при повороте доски относительно её центра на $90^\circ, 180^\circ$ и 270° мы из данной «хорошей» позиции получим три новых «хороших» расположения ферзей, отличных друг от друга. Поэтому все «хорошие» позиции разбиваются на четвёрки, в которых они переходят друг в друга при повороте доски. Значит, количество «хороших» позиций кратно 4.

Рассмотрим позиции, в которых ферзи расположены симметрично друг другу относительно центра доски. Проведём вертикальную линию через центр доски. Вне зависимости от чётности N одна половина доски разбивается на четыре равные по количеству клеток области, в которых может находиться один из ферзей. Положение второго определяется однозначно. Значит, количество таких позиций тоже кратно 4.

	1	1	1				
2		1	1				
2	2		1				
2	2	2					
3	3	3					
3	3		4				
3		4	4				
	4	4	4				

	1	1					
2		1					
2	2						
3	3						
3		4					
	4	4					

3. [10 баллов] а) Коля составляет расписание тренировок для себя на ближайшие две недели так, чтобы после каждого дня тренировок у него был хотя бы один день отдыха. Сколькими способами он может составить себе такое расписание, если он должен провести за эти 14 дней ровно 4 тренировки?
- б) А если после каждого дня тренировок у него должно быть хотя бы два дня отдыха?

Решение.

а) У Коли должно быть 10 дней отдыха. День тренировок может быть между ними (9 вариантов), перед ними (1 вариант) или после них (ещё 1). Итого 11 вариантов, из которых нужно выбрать 4. Имеем $C_{11}^4 = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$ способов составить подобное расписание.

б) Разместим по два дня отдыха между днями тренировок. Осталось ещё 4 дня отдыха, которые можно поместить до первой тренировки, или после первой, но перед второй, и т. д. – всего 5 вариантов. Итого $\tilde{C}_5^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ способов составить подобное расписание.

Ответ: а) 330 способов; б) 70 способов.

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$x^4 + 8x + 8 \leq 0.$$

Решение. Преобразуем выражение в левой части неравенства:

$$x^4 + 8x + 8 = (x^2 - 2)^2 + 4(x + 1)^2.$$

Тогда рассмотрим неравенство

$$(x^2 - 2)^2 + 4(x + 1)^2 \leq 0.$$

Так как $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ и $4(x + 1)^2 \geq 0$, то $(x^2 - 2)^2 + 4(x + 1)^2 \geq 0$. Следовательно, рассматриваемое неравенство справедливо выполняется только в том случае, если

$$(x^2 - 2)^2 + 4(x + 1)^2 = 0.$$

Откуда

$$\begin{cases} x^2 - 2 = 0, \\ x = -1. \end{cases}$$

У данной системы решений нет.

Ответ: решений нет.

Критерии оценивания для задачи 4:

Корректно доказано утверждение о том, что при $x \geq -1$ неравенство не имеет решений (или любое эквивалентное утверждение) – 2 балла.

Найдена производная функции и вычислен экстремум – 4 балла.

Найдено точка, в которой функция достигает своего экстремального значения, не доказано, что это точка минимума – не более 9 баллов.

5. [15 баллов]

В треугольнике ABC выполняется равенство $AC + BC = 3AB$.

а) Докажите, что одна из средних линий треугольника ABC касается окружности, вписанной в него.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если ещё известно, что его периметр равен 20 и отношение высоты, проведённой из вершины C , к стороне AC равно 0,6.

Решение.

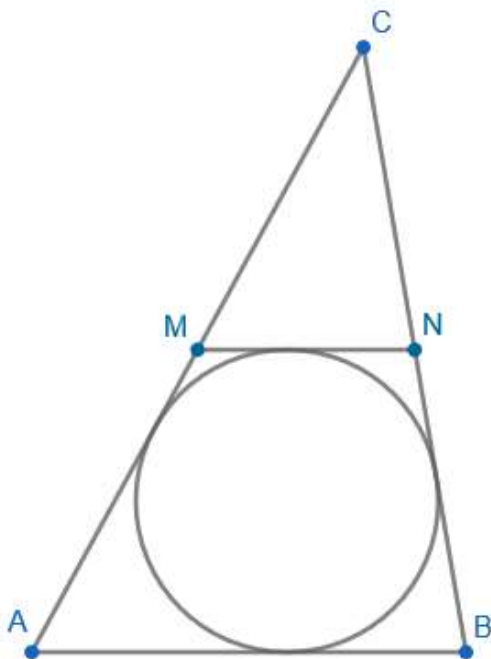


Рис. 1

а) В треугольник ABC впишем окружность, затем параллельно AB проведём касательную к окружности, которая пересечёт стороны AC и BC соответственно в точках M и N (рис. 1). Треугольники ABC и MNC будут подобны с некоторым коэффициентом k , где $0 < k < 1$. Так как в трапецию $AMNB$ вписана окружность, то $MN + AB = AM + BN$. Откуда, учитывая $MC = kAC$, $NC = kBC$ и $MN = kAB$, а также $AM = AC - MC = (1 - k)AC$ и $BN = BC - NC = (1 - k)BC$, получим $kAB + AB = (1 - k)AC + (1 - k)BC$. Откуда следует, что $(k + 1)AB = (1 - k)(AC + BC)$. Учитывая равенство $AC + BC = 3AB$, получаем $(k + 1)AB = (1 - k) \cdot 3AB$, т.е. $k + 1 = 3(1 - k)$ и $k = \frac{1}{2}$. Последнее означает, что MN – средняя линия треугольника ABC .

б) По условию периметр треугольника ABC равен 20, откуда получаем $20 = AC + BC + AB = 3AB + AB = 4AB$, т. е. $AB = 5$. Пусть CH – высота треугольника ABC . По условию имеем $\frac{CH}{AC} = 0,6$, т. е. $\sin \angle A = \frac{3}{5}$, а значит $\cos \angle A = \frac{4}{5}$ (если угол A острый) или $\cos \angle A = -\frac{4}{5}$ (если угол A тупой). Положим $AC = x$. Тогда из равенства $AC + BC = 15$ получим $BC = 15 - x$. По теореме косинусов имеем $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle A$, т. е. $(15 - x)^2 = x^2 + 5^2 \mp 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}$, $x^2 - 30x + 225 =$

$= x^2 + 25 \mp 8x$, $200 = (30 \mp 8)x$, а значит, $x = \frac{200}{22} = \frac{100}{11}$ или $x = \frac{200}{38} = \frac{100}{19}$. Откуда окончательно по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle A$ получаем $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{11} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{150}{11}$ (если угол A острый) или $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{19} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{150}{19}$ (если угол A тупой).

Ответ б): $\frac{150}{11}$ или $\frac{150}{19}$.

6. [15 баллов]

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K расположена на прямой AA_1 так, что $A_1 K / KA = k_1 / k_2$. Плоскость KBC разделяет куб на два многогранника Φ и Ψ , где $A \in \Phi$.

а) Докажите, что если $k_1 = k_2$, то отношение объёмов многогранников Ψ и Φ равно 3.

б) Найдите объём многогранника Ψ , если $k_1 = 1, k_2 = 2$ и $AB = 3$.

Решение.

Заметим, что любая плоскость, проходящая через центр симметрии параллелепипеда, разделяет его на два равновеликих многогранника, так как они центрально симметричны. За использование этого факта по умолчанию (без обоснования) в ходе решения баллы не снимаются.

а) При $k_1 = k_2$ точка K будет расположена в середине ребра AA_1 (рис. 2).

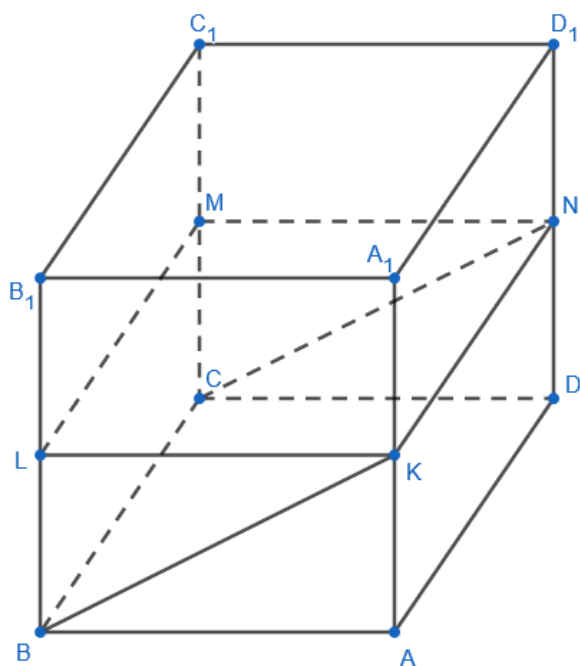


Рис. 2

Плоскость KBC пересекает параллельные грани BCC_1 и ADD_1 по параллельным прямым BC и KN (N – точка пересечения плоскости KBC с ребром DD_1). Так как $BC \parallel AD$, то $KN \parallel AD$. Через прямую KN проведём плоскость параллельно плоскости ABC , которая пересечёт рёбра BB_1 и CC_1 соответственно в точках L и M . Многогранник $ABCDKLMN$ является параллелепипедом, объём которого ввиду $AK = \frac{AA_1}{2}$ вдвое меньше объёма куба. Плоскость KBC разделяет этот параллелепипед на два равновеликих многогранника, один из которых совпадает с Φ . Откуда следует, что объём

многогранника Φ вчетверо меньше объёма куба, а значит объём многогранника Ψ втрое больше объёма многогранника Φ .

б) При $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ точка K может располагаться в одном случае на ребре AA_1 (делит отрезок A_1A в отношении 1:2, считая от конца A_1), а в другом случае на луче AA_1 за точкой A_1 (A_1 является серединой отрезка AK). Рассмотрим эти случаи.

1) Аналогично (рис. 3), как в пункте а), строим параллелепипед $ABCDKLMN$, объём которого ввиду $AK = \frac{2}{3}AA_1$ равен $\frac{2}{3}$ объёма куба, т. е. $\frac{2}{3} \cdot 3^3 = 18$. Объём многогранника Φ равен половине объёма этого параллелепипеда, т. е. равен $\frac{18}{2} = 9$, а значит объём многогранника Ψ равен $3^3 - 9 = 18$.

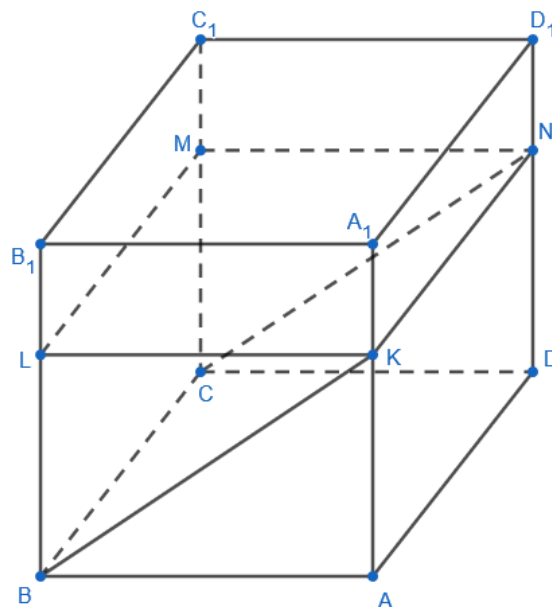


Рис. 3

2) В этом случае (рис. 4) N – точка пересечения плоскости KBC с лучом DD_1 (учитываем как и в а), что $KN \parallel AD$), L и M – точки пересечения плоскости, проходящей через прямую KN параллельно плоскости ABC , с лучами BB_1 и CC_1 соответственно. Имеем параллелепипед $ABCDKLMN$, составленный из двух кубов (учитываем, что $A_1K = A_1A$). Пусть прямая KB пересекает ребро A_1B_1 в точке P . Так как A_1 – середина отрезка AK и $A_1B_1 \parallel AB$, то A_1P – средняя линия в треугольнике ABK , т. е. точка P середина отрезка A_1B_1 . Но тогда плоскость PBC , совпадающая плоскостью KBC , делит куб $B_1BCC_1A_1ADD_1$ на два многогранника, объёмы которых согласно доказанному в а) относятся, как 1:3. Многогранник, содержащий вершину A , т. е. многогранник Φ , в этой конфигурации имеет больший объём. Поэтому объём многогранника Ψ равен $\frac{1}{4}$ объёма куба, т. е. равен $\frac{1}{4} \cdot 3^3 = \frac{27}{4}$.

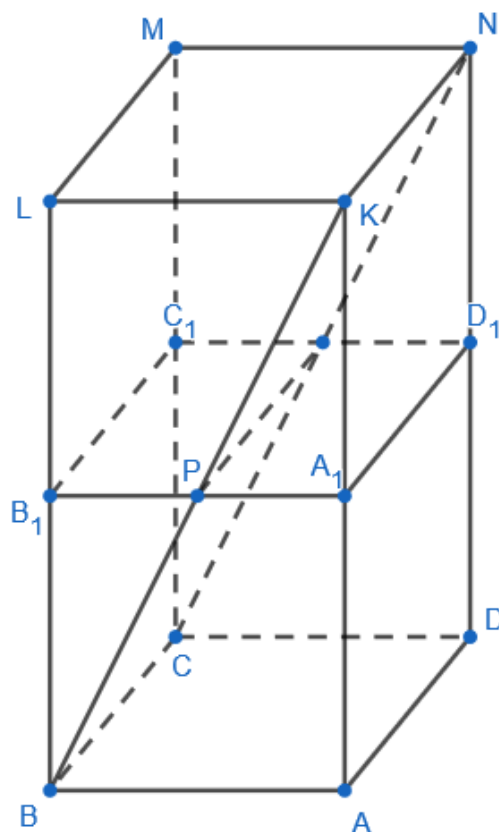


Рис. 4

Ответ б): 18 или $\frac{27}{4}$.

7. [15 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{x + 14\sqrt{x - 49}} + \sqrt{x - 14\sqrt{x - 49}} = 14.$$

Решение:

Пусть $y = \sqrt{x - 49}$, тогда для $y \geq 0$

$$\sqrt{y^2 + 49 + 14y} + \sqrt{y^2 + 49 - 14y} = 14.$$

$$\sqrt{(y + 7)^2} + \sqrt{(y - 7)^2} = 14.$$

$$y + 7 + |y - 7| = 14.$$

$$|y - 7| = 7 - y.$$

Последнее равенство тождественно в случае, если выражение под модулем принимает неположительные значения, тогда

$$0 \leq y \leq 7.$$

$$\sqrt{x - 49} \leq 7.$$

$$0 \leq x - 49 \leq 49.$$

$$49 \leq x \leq 98.$$

Ответ: отрезок $[49, 98]$.

Критерии оценивания для задачи 7:

Корректно доказано, что $x = 98$ входит в множество решений уравнения – 2 балла.

Найдено любое, не более чем конечное количество решений, за исключением корня $x = 98$ – 1 балл.

Итоговое решение не включает корень $x = 98$ – не более 13 баллов.

Итоговое решение не включает не более, чем конечное число корней, при этом включает корень $x = 98$ – не более 14 баллов.

Приведено корректное доказательство или только для нижнего ограничения ($x \geq 49$) или только для верхнего ($x \leq 98$) – 5 баллов.

Доказано, что решений бесконечное множество, множество решений лежит в отрезке $[49, 98]$ – 10 баллов.

8. [15 баллов] Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 11x + 25}{x - 7} \geq 3x - 7.$$

Решение. Преобразуем выражение в левой части неравенства

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 11x + 25}{x - 7} &= \frac{(x + 1)(2x - 3) + 5}{x + 1} + \frac{(x - 7)(x - 4) - 3}{x - 7} = \\ &= 2x - 3 + \frac{5}{x + 1} + x - 4 - \frac{3}{x - 7} = 3x - 7 + \frac{5}{x + 1} - \frac{3}{x - 7}. \end{aligned}$$

Тогда

$$3x - 7 + \frac{5}{x + 1} - \frac{3}{x - 7} \geq 3x - 7.$$

$$\frac{5}{x + 1} - \frac{3}{x - 7} \geq 0.$$

$$\frac{x - 19}{(x + 1)(x - 7)} \geq 0.$$

Методом интервалов получаем решение: $x \in (-1, 7) \cup [19, +\infty)$.

Ответ: $(-1, 7) \cup [19, +\infty)$.

Критерии оценивания для задачи 8:

В ответ включены значения $x = -1$ и/или $x = 7$ – минус 2 балла за каждое включённое значение.

Из ответа исключена точка $x = 19$ – не более 14 баллов.

Корректно доказано, что множество решений задачи включает интервал $(-1, 7)$ – 5 баллов.

Корректно доказано, что множество решений задачи включает интервал $[19, +\infty)$ – 5 баллов.