

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2024/2025 учебный год

Задания отборочного этапа

1. [10 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2(1 + \cos^2 x)} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} = \sqrt{10}.$$

2. [10 баллов] На доску $N \times N$ клеток ($N \geq 3$) ставят двух одинаковых ферзей так, что они не атакуют друг друга. Докажите, что число таких расстановок кратно 4.

3. [10 баллов] а) Коля составляет расписание тренировок для себя на ближайшие две недели так, чтобы после каждого дня тренировок у него был хотя бы один день отдыха. Сколькими способами он может составить себе такое расписание, если он должен провести за эти 14 дней ровно 4 тренировки?

б) А если после каждого дня тренировок у него должно быть хотя бы два дня отдыха?

4. [10 баллов] Решите неравенство

$$x^4 + 8x + 8 \leq 0.$$

5. [15 баллов]

В треугольнике ABC выполняется равенство $AC + BC = 3AB$.

а) Докажите, что одна из средних линий треугольника ABC касается окружности, вписанной в него.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если ещё известно, что его периметр равен 20 и отношение высоты, проведённой из вершины C , к стороне AC равно 0,6.

6. [15 баллов]

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K расположена на прямой AA_1 так, что $A_1 K / KA = k_1 / k_2$. Плоскость KBC разделяет куб на два многогранника Φ и Ψ , где $A \in \Phi$.

а) Докажите, что если $k_1 = k_2$, то отношение объёмов многогранников Ψ и Φ равно 3.

б) Найдите объём многогранника Ψ , если $k_1 = 1, k_2 = 2$ и $AB = 3$.

7. [15 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{x + 14\sqrt{x - 49}} + \sqrt{x - 14\sqrt{x - 49}} = 14.$$

8. [15 баллов] Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 11x + 25}{x - 7} \geq 3x - 7.$$