

Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по математике

2024/2025 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [15 баллов] Садовник выкладывает на прилавок собранный урожай из 48 яблок в ряд. Он готов отдать 47 из них своим помощникам, но себе планирует оставить единственное найденное золотое яблоко (редкий сорт с особым оттенком кожуры). Раздачу яблок он решил провести за несколько шагов: на каждом шаге один из помощников говорит, какое по счёту с края яблоко он хочет забрать, а садовник решает, с какого края считать. Найдите все возможные начальные положения золотого яблока, при которых садовник может гарантировать, что оно достанется ему вне зависимости от действий помощников.

2. [15 баллов] Решите уравнение

$$(x^2 + x - 2)^3 + (2x^2 - 7x + 5)^3 = 27(x - 1)^6.$$

3. [15 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x = \frac{17}{16} \sin y, \\ 3 \sin z + 5 \cos^2 y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [15 баллов] На технологическую конференцию приехали несколько проектных команд, в каждой из которых был один руководитель, один архитектор и не более 10 разработчиков. Организатор хакатона выбирал для демонстрации прототипа одного руководителя, одного архитектора и одного разработчика из трёх разных команд. Оказалось, что у него было ровно 4550 способов сформировать такую демонстрационную группу. Сколько всего разработчиков могло быть на этой конференции?

5. [20 баллов] Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , причём $\frac{AB}{BM} = \frac{CD}{CM} = k$ и $k > 1$.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите сторону BC , если ещё известно, что $AC = 11, BD = 10, AB = 5$ и $AM = 3$.

6. [20 баллов] Точка K лежит на грани $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ и равноудалена от точек A, B и C . Через точку K параллельно прямой AC_1 проведена плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AA_1 .

б) Найдите длину отрезка пересечения плоскости α с гранью AA_1D_1D , если ещё известно, что $AA_1 = 24$, $AD = \frac{45}{7}$ и α пересекает прямую A_1B_1 в точке L такой, что

$$\frac{A_1L}{B_1L} = \frac{7}{2}.$$