Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2025/2026 учебный год

Задания отборочного этапа

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов.

1. [10 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 + x - 6| \leq 2x + 6.$$

2. [10 баллов] Решите уравнение

$$\log_x(2x-1)\log_{2x-1}(3x-2)\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2025x-2024}(2026x-2025) = 2.$$

3. [10 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+7x+4}-2} \leq \frac{1}{3x^2+7x}.$$

4. [10 баллов] Решите уравнение

$$\sin^2 x(1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \cdots + \sin^{2n} x + \cdots) +$$
$$+\cos^2 x(1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cdots + \cos^{2n} x + \cdots) = 2.$$

5. [15 баллов]
$MNKL$ – параллелограмм с острым углом $\angle MNK = 30^0$. Длина стороны ML равна 10. Окружность проходит через вершину M и касается прямой KL в точке Q. Точка P пересечения окружности с прямой ML расположена на расстоянии 2,5 от точки L.
а) Докажите, что $QP{:}\,PL = MQ{:}\,QL$.
б) Найдите радиус этой окружности.

6. [15 баллов] В четырехугольной пирамиде $SABCD$ все боковые ребра равны 10. В основании пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого образует со стороной AB угол, косинус которого равен $^3/_5$. Угол $\angle BSD$ равен 60^0. Секущая пирамиду $SABCD$ плоскость α равноудалена от всех ее вершин.

   а) Докажите, что плоскость α может пересекать ребра пирамиды только в их серединах.

   б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

7. [15 баллов] Кузнечик прыгает по числовому лучу вправо прыжками длины 2 или 3. Сколькими способами он может попасть из точки с координатой 2001 в точку с координатой 2026?

8. [15 баллов] Решите неравенство

$$\log_{|2x-1|}\frac{1}{x^2-x+\frac{3}{2}} > \log_{|2x-1|}\frac{2}{3} - 1.$$