Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2025/2026 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [15 баллов] Решите неравенство:

$$\frac{\left(3-\log_2\left(2\sin\frac{\pi x}{2}+6\right)\right)\cdot\left(2-|\cos x|-\sqrt{\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)-1}\right)}{(\log_3 x)^2-\log_3(x^7)+10}\leq 0.$$

Решение. ОДЗ: $|x|+1\neq 1$, $x\neq 0$; из логарифмов в знаменателе: $x>0$.

Заметим, что

$$-1\leq \sin\frac{\pi x}{2}\leq 1,$$

$$-2\leq 2\sin\frac{\pi x}{2}\leq 2,$$

$$4\leq 6+2\sin\frac{\pi x}{2}\leq 8,$$

$$2\leq \log_2\left(2\sin\frac{\pi x}{2}+6\right)\leq 3,$$

$$0\leq 3-\log_2\left(2\sin\frac{\pi x}{2}+6\right)\leq 1.$$

Из приведённых рассуждений равенство 0 достигается только при

$$\sin\frac{\pi x}{2}=1,$$

$$\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

$$x=1+4k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

С учётом ОДЗ ($x>0$) получаем $x\in\left\{1+4k\mid k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$ – точки, в которых первый множитель может равняться 0.

Для второго множителя в числителе:

$$x^2+2|x|+1=(|x|+1)^2,$$

$$\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)=2,$$

$$\sqrt{\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)-1}=1,$$

$$0 \le |\cos x| \le 1,$$

$$0 \le 2-|\cos x|-\sqrt{\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)-1} \le 1.$$

Из приведённых рассуждений равенство 0 достигается только при

$$|\cos x|=1,$$

$$\cos x = 1 \quad \text{или} \quad \cos x = -1,$$

$$x = 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \pi + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

С учётом ОДЗ ($x > 0$) получаем $x \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{N}\}$ – точки, в которых второй множитель может равняться 0.

Из полученных ограничений следует, что числитель выражения всегда неотрицательный. Следовательно, дробь неположительная, когда числитель равен нулю или когда знаменатель отрицательный:

$$(\log_3 x)^2 - \log_3(x^7) + 10 < 0,$$

$$(\log_3 x)^2 - 7\log_3 x + 10 < 0,$$

$$(\log_3 x - 2)(\log_3 x - 5) < 0,$$

$$2 < \log_3 x < 5,$$

$$\log_3 3^2 < \log_3 x < \log_3 3^5,$$

$$9 < x < 243.$$

Заметим, что теперь $1+4k \neq 9$, $1+4k \neq 243$. Так как k – целое неотрицательное число, то остаётся только первое неравенство: $k \neq 2$.

Объединяя полученные решения для случая равенства выражения 0 и для случая, когда выражение отрицательное, получаем, что

$$x \in (9;\ 243) \cup \{\pi k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{1+4k \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, k \neq 2\}.$$

Ответ: $(9;\ 243) \cup \{\pi k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{1+4k \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, k \neq 2\}$.

Критерии оценивания.

ОДЗ полностью определена: x > 0, основание логарифма ≠ 1, знаменатель ≠ 0 – 2 балла.

Показано, что первый множитель числителя $A \in [0, 1]$, плюс, найдены нули $x = 1 + 4k$ – 3 балла.

Упрощение $\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)=2$ – 1 балл.

Показано, что второй множитель числителя $B \in [0, 1]$, найдены его нули $x = \pi k$ – 3 балла.

Из того, что числитель ≥ 0 сделан корректный вывод о структуре решения (нули числителя + знаменатель < 0) – 2 балла.

Решение неравенства для знаменателя: $9 < x < 243$ – 2 балла.

Корректное объединение всех компонент ответа, проверка границ 9 и 243 на вхождение в серии – не менее 14 баллов.

2. [15 баллов] Найдите минимальное значение выражения

$$y = \left|36^k - 5^n\right|,$$

где n и k – натуральные числа.

Решение.
Заметим, что рассматриваемое выражение заканчивается либо цифрой 1 (если $36^k > 5^n$), либо цифрой 9 ($36^k < 5^n$). Исследуем, может ли данное выражение равняться 1. Предположим, что может тогда для некоторых n и k справедливо следующее:

$$36^k - 5^n = 1,$$
$$36^k = 1 + 5^n.$$

Заметим, что 36^k кратно 4, а 5^n при делении на 4 всегда даст в остатке 1 (так как $5^n - 1$ кратно 4). Но тогда $1 + 5^n$ при любых n даст в остатке 2 при делении на 4. Остатки левой и правой частей равенства не совпадают, получаем противоречие.
Следующее по величине (по возрастанию) возможное значение для выражения – 9:

$$5^n - 36^k = 9,$$
$$5^n = 9 + 36^k.$$

Заметим, что правая часть уравнения при любых k кратна 9, а левая часть – не кратна 9 ни при каких n. Противоречие.
Следующее по величине возможное значение для выражения – 11 – достигается, например, при $k = 1$ и $n = 2$. Так как выражение не может равняться 1 или 9, то 11 – минимально возможное значение.

Ответ: 11.

Критерии оценивания.
Доказано, что выражение не может равняться 0 – баллы не начисляются.
Найден пример со значением 11 – 2 балла.
Рассмотрена структура выражения (остатки / последняя цифра) – 3 балла.
Доказано, что значение 1 невозможно – 5 баллов.
Доказано, что значение 9 невозможно – 5 баллов.

3. [15 баллов] На прямой линии отмечены $n \geq 10$ точек с координатами 1, 2, …, n. Два игрока по очереди соединяют две выбираемые на каждом ходу точки отрезком. Запрещается проводить отрезок, который имеет общую внутреннюю точку с любым из уже проведённых отрезков (касание в концах разрешено) и длина которого (абсолютное значение разности координат концов отрезка) превышает $n/5$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для какого игрока существует выигрышная стратегия?

Решение.

Заметим, что для любого $n \geq 10$ максимально допустимая длина проводимого отрезка $n/5 \geq 2$. Рассмотрим два случая по чётности n. Пусть первый игрок своим первым ходом делит множество точек на две симметричные части, после чего применяет стратегию «симметричного ответа» (копирует ходы второго игрока в симметричной части). Рассмотрим два случая.

Случай 1: $n = 2k$ (n – чётное).

Первый игрок проводит отрезок $[k, k + 1]$. Длина отрезка равна 1. Так как $n \geq 10$, то $1 \leq n/5$, ход допустим. Этот отрезок делит остальные точки на два множества: левое $A = \{1, 2, \ldots, k\}$; правое: $B = \{k + 1, k + 2, \ldots, 2k\}$. Любой отрезок, соединяющий точку из A и точку из B, будет иметь внутреннюю точку, принадлежащую интервалу $(k, k + 1)$, что запрещено. Таким образом, игра распадается на две независимые партии на множествах A и B. Множества A и B симметричны относительно центра отрезка $[1, n]$.

Тогда для данного случая определим стратегию следующим образом: если второй игрок проводит отрезок внутри множества A (или B), первый игрок проводит симметричный ему отрезок внутри множества B (соответственно A). Симметричный отрезок имеет ту же длину, значит, ограничение по длине выполняется. Он не пересекает существующие отрезки, так как исходный ход второго игрока был легальным, а симметрия сохраняет взаимное расположение.

Так как первый игрок всегда может ответить на ход второго, а число ходов конечно, проигрывает второй игрок.

Случай 2: $n = 2k + 1$ (n – нечётное).

Первый игрок проводит отрезок $[k, k + 2]$. Длина отрезка равна 2. Так как минимальное нечётное $n \geq 10$ равно 11, то $n/5 \geq 2.2 > 2$. Ход допустим.

Точка $k + 1$ становится недоступной для игры (изолированной). Оставшиеся точки делятся на два симметричных множества: левое $A = \{1, 2, \ldots, k\}$; правое $B = \{k + 2,$

$k+3,\ \ldots,\ 2k+1\}$. Далее применяется та же стратегия симметричного ответа, как в случае чётного n.

Ответ: для первого игрока.

Критерии оценивания.
Высказана идея симметрии (без конкретных ходов и разбиения) – 3 балла.

Корректно разобран первый ход и разбиение на две половины для чётного n – 3 балла.

Корректно разобран первый ход и разбиение для нечётного n (включая изоляцию средней точки) – 3 балла.

Обосновано, что отрезки из разных половин проводить нельзя (пересечение с начальным отрезком), для случая разбиения исходного множества точек на два равных множества – 3 балла.

Корректно обоснована стратегия симметричного ответа (длина копии такая же, следовательно, допустима; пересечений нет; первый всегда может ответить) – 3 балла.

4. [15 баллов] Петя записал на доске первые 35 натуральных чисел в порядке возрастания. Он может менять местами любые два соседние числа за 1 балл, а любые два числа, отличающиеся на 5, за 0 баллов (да, совершенно бесплатно). За какое наименьшее число баллов ему удастся расставить числа в обратном порядке?

Решение.

Оценка. Разобьём числа на пять групп. В каждую группу поместим числа, дающие одинаковый остаток при делении на 5.

Группа $A=\{1,6,11,16,21,26,31\}$

Группа $B=\{2,7,12,17,22,27,32\}$

Группа $C=\{3,8,13,18,23,28,33\}$

Группа $D=\{4,9,14,19,24,29,34\}$

Группа $E=\{5,10,15,20,25,30,35\}$

Заметим, что числа в каждой группе можно расположить в любом порядке за 0 баллов. Также обратим внимание на то, что числа из группы A должны попасть в группу E (число 1 должно стать 35-ым, число 6 – 30-ым, и т. д.), и наоборот. Числа из группы B должны попасть в группу D, а числа из группы D должны попасть в группу B. Числа из группы C можно расположить в обратном порядке за 0 баллов.

Пример. Правильно расставить все числа из групп A и E можно за 7 баллов.

(Например, число 35 можно сделать 5-ым, а число 1 – шестым за 0 баллов, так как мы меняем их порядок в рамках одной группы. Затем меняем пятое и шестое число за 1 балл. Число 35 в группе A, и его можно сделать первым, а 1 в группе E, и его можно сделать 35-ым за 0 баллов. У нас получилось поменять первое и последнее числа за 1 балл. Аналогично поступим с другими парами чисел из групп A и E).

Рассмотрим оставшиеся три группы. Мысленно оставим только число 3 в группе C. Поменяем его с числом из группы B. Каждый раз будем передвигать дальше число, пришедшее в группу C, за счёт нового числа. Тогда за 14 баллов мы переместим все числа из группы B в группу D, а из D – в B кроме одного: оно останется в группе C, не дойдя до B. Поменяем её с числом 3, и все числа окажутся в нужных группах. У нас получилось за 15 баллов переместить числа из группы B в группу D, а числа из D – в B.

Итого мы потратили 7 + 15 = 22 балла.

Можно ли было обойтись меньшим количеством баллов?

Оценка. Мысленно расположим эти группы по кругу. Платная операция переставляет пару чисел из соседних групп. Числа из группы A должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы попасть в группу E. Аналогично для чисел из группы E. Числа из группы B должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до группы D. Аналогично для группы D. Значит, потребуется хотя бы (7 + 7 + 7*2 + 7*2):2 = 21 балл. Но если будет потрачен только 21 балл, то числам из группы B придётся идти через группу C, поэтому хотя бы одно число из группы C будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 21 балла.

Ответ: 22.

5. [20 баллов] Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 2. Окружность проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, а ее диаметр равен $\sqrt{29}$. Длина отрезка касательной, проведенной из вершины C к этой окружности, равна 5.

а) Доказать, что прямая BC пересекает данную в условии окружность в двух точках.

б) Найти длину стороны BC прямоугольника $ABCD$.

Решение.

а) По условию окружность проходит через точку B. Пусть B – точка касания с окружностью. Тогда хорда AB перпендикулярна касательной BC. Значит, AB – диаметр. Но по условию $AB = 2 < d = \sqrt{29}$. Значит, B не является точкой касания. Следовательно, прямая BC пересекает окружность ещё в одной точке, отличной от точки B.

б) Возможны два варианта расположения окружности: рис. 1 и рис. 2.

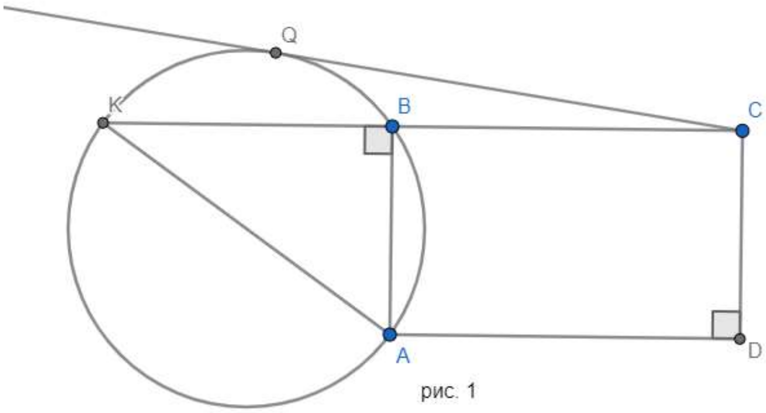


рис. 1

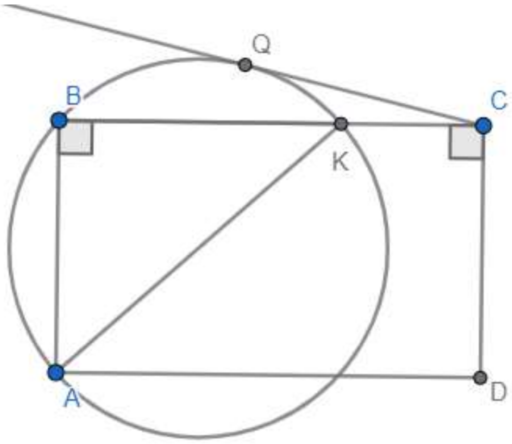


рис. 2

$d = \sqrt{29}$ – диаметр; $AB = 2$;

Q – точка касания; $QC = 5$

Пусть BC пересекает окружность в точке K. $\angle KBA = 90° \Rightarrow AK$ – диаметр. Тогда $AK = \sqrt{29}$.

По теореме Пифагора из ΔABK:

$$BK^2 + AB^2 = AK^2 \Rightarrow BK = \sqrt{29 - 4} = 5$$

1-й случай (рис. 1) По свойству длины отрезка касательной:

$$CQ^2 = CK \cdot CB$$

$$25 = (CB + 5) \cdot CB$$

Пусть $CB = x,$ тогда

$$25 = x^2 + 5x$$

$$x^2 + 5x - 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{-5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ поэтому $CB = \frac{5\sqrt{5}-5}{2}$.

2-й случай (рис. 2)

Аналогично:

$$CQ^2 = CB \cdot CK$$

Пусть $CB = x$, тогда

$$CQ^2 = CB \cdot (CB - BK)$$

$$25 = x(x - 5)$$

$$x^2 - 5x - 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ поэтому $CB = \frac{5+5\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: б) $CB = \frac{5\sqrt{5}\pm 5}{2}$.

Критерии оценивания.

Верно выполнен пункт а) – 5 баллов.

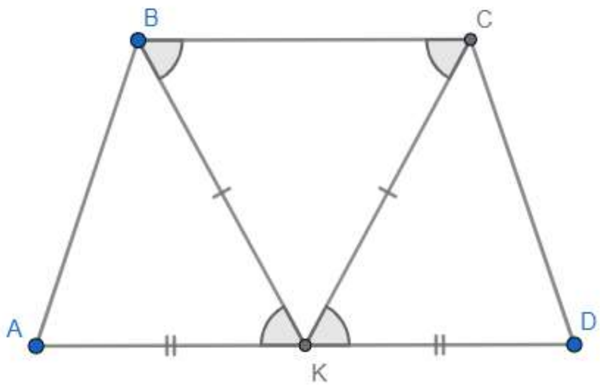
Верно рассмотрен каждый из случаев в пункте б) – по 5 баллов за случай.

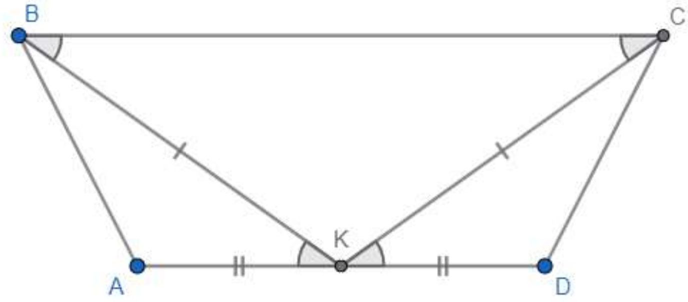
6. [20 баллов] Дана четырехугольная пирамида $SABCD$. Ее основание – трапеция, у которой $AD||BC$. Точка C - основание высоты пирамиды. Точка K равноудалена от точек B и C и расположена в середине отрезка AD. Плоскость α проходит через середину отрезка SC параллельно плоскости ABC.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями SBK и α, если дополнительно известно, что $BC = 4\sqrt{2}$ и $SC = 2\sqrt{10}$, а на прямой BK можно расположить точку L так, что будут выполняться условия: $\angle BLC = \angle SLC$ и $BL: LK = 3: 1$.

Решение.





а) По условию $BK = CK$ и $AK = DK$. $BC \parallel AD, BK$ – секущая, тогда $\angle CBK = \angle BKA$ как накрест лежащие. ΔBKC – равнобедренный $\Rightarrow$ $\angle CBK = \angle BCK$ (углы при основании).

$BC \parallel AD, CK$ – секущая, тогда $\angle BCK = \angle CKD$ как накрест лежащие. Итак, $\angle BKA = \angle CKD$; $BK = CK$; $AK = DK \Rightarrow \Delta AKB = \Delta DKC$ по первому признаку равенства треугольников. Значит, $AB = CD \Rightarrow$ трапеция равнобедренная.

Любая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым.

Пусть C' – точка пересечения SC и α, B' – точка пересечения SB и α, тогда $C'B' \parallel CB$ и $C'B' = \frac{1}{2}CB$ (как средняя линия треугольника).

Аналогично: $SA \cap \alpha = A'$, тогда $B'A' \parallel BA$ и $B'A' = \frac{1}{2}BA$;

Также $SD \cap \alpha = D'$, тогда $C'D' \parallel CD$ и $C'D' = \frac{1}{2}CD$.

Кроме того, $A'D' \parallel AD$ и $A'D' = \frac{1}{2}AD$.

Итак, $A'D' \parallel B'C'$, а $A'B' = C'D'$. То есть в сечении равнобедренная трапеция, ч. т. д.

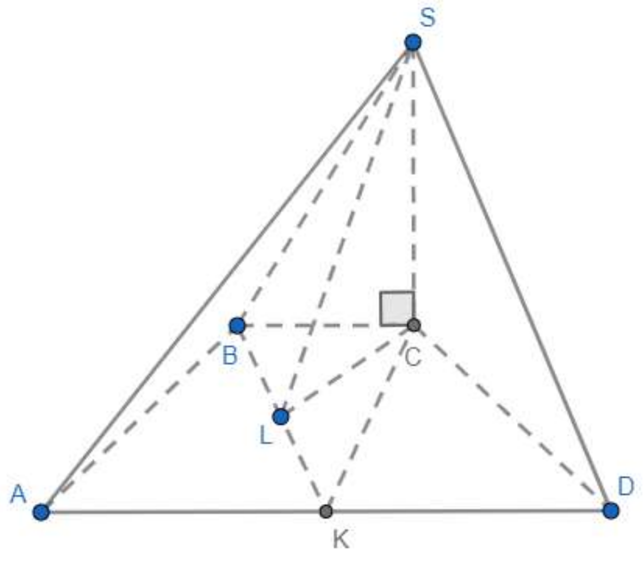


рис. 1

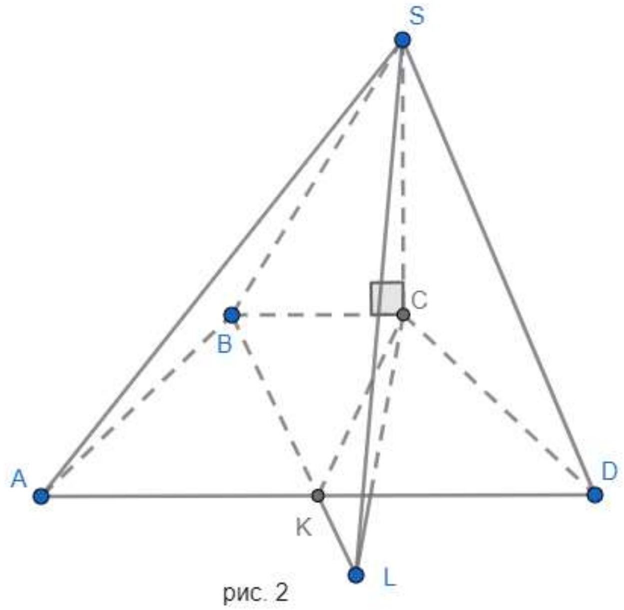


рис. 2

б) $BC = 4\sqrt{2}; SC = 2\sqrt{10}$

Плоскость α параллельна плоскости $ABC \Rightarrow \angle(\alpha; SBK) = \angle(ABC; SBK)$.

Обозначим искомый угол $\varphi = \angle(\alpha; SBK) = \angle(ABC; SBK)$.

Построим $C\tilde{L} \perp BK$. По условию $SC \perp ABC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах наклонная $S\tilde{L} \perp BK$.

Значит, угол между плоскостями $\varphi = \angle S\tilde{L}C$.

Заметим, что $\angle B\tilde{L}C = \angle SC\tilde{L} = 90° \Rightarrow$ точка $\tilde{L}$ совпадает с точкой L (в силу единственности перпендикуляра).

Тогда из условия $BL: LK = 3: 1$.

Искомый тангенс угла φ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{SC}{CL}$

Возможны два варианта:

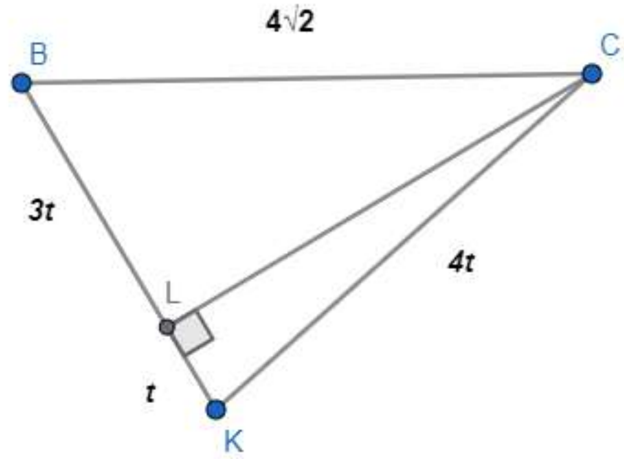


рис. 3

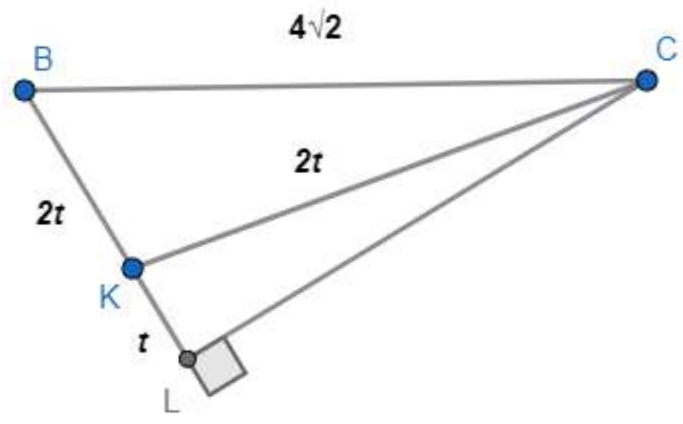


рис. 4

1 случай) L лежит на отрезке BK (рис. 3)

$$BL = 3t; LK = t \Rightarrow CK = 3t + t = 4t = BK$$

По теореме Пифагора из ΔCLK:

$$CK^2 = CL^2 + LK^2 \Rightarrow CL^2 = (4t)^2 - t^2 = 15t^2$$

По теореме Пифагора из ΔBLC:

$$BC^2 = BL^2 + CL^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 = (3t)^2 + 15t^2$$

$$32 = 9t^2 + 15t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

Тогда $CL^2 = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20; CL = 2\sqrt{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{SC}{CL} = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{2}$

2 случай) L лежит на продолжении прямой BK (рис. 4)

$$BL = 3t - t = 2t; CK = BK = 2t$$

По теореме Пифагора из ΔCKL:

$$CK^2 = KL^2 + CL^2$$

$$(2t)^2 = t^2 + CL^2 \Rightarrow CL^2 = 4t^2 - t^2 = 3t^2$$

По теореме Пифагора из ΔBLC:

$$BC^2 = BL^2 + CL^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 = (3t)^2 + 3t^2$$

$$32 = 9t^2 + 3t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

Отсюда $CL^2 = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8; CL = 2\sqrt{2}$.

Значит, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{5}$.

Ответ: б) $\sqrt{2}$ или $\sqrt{5}$.

Критерии оценивания.

Верно выполнен пункт а) – 5 баллов.

Верно рассмотрен каждый из двух возможных случаев в пункте б) – по 5 баллов за каждый случай.