Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2025/2026 учебный год

Задания отборочного этапа

Критерии проверки заданий:

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги. Наличие верного ответа без пояснений оценивается в 0 баллов. Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно пояснениям в конце решения соответствующего задания. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. [10 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 + x - 6| \leq 2x + 6.$$

Решение.

Очевидно, что $2x + 6 \geq 0$, или $x \geq -3$. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \leq 2x + 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 - x + 6 \leq 2x + 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая каждое из этих неравенств, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -3 \text{ или } x \geq 2, \\ -3 \leq x \leq 4, \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x < 2, \\ x \leq -3 \text{ или } x \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ 2 \leq x \leq 4, \end{array}\right. \\ 0 \leq x < 2. \end{array}\right.$$

Итак, $x = -3$ или $0 \leq x \leq 4$.

Ответ: $x = -3$ или $0 \leq x \leq 4$.

2. [10 баллов] Решите уравнение

$$\log_x(2x-1)\log_{2x-1}(3x-2)\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2025x-2024}(2026x-2025)=2.$$

Решение.

Заметим, что $x>0, 2x-1>0, 3x-2>0, \ldots, 2026x-2025>0$. Значит, $x>\frac{2025}{2026}$. С другой стороны, $x\neq 1, 2x-1\neq 1, 3x-2\neq 1, \ldots, 2025x-2024\neq 1$, т. е. $x\neq 1$.

Возведём величину x в степень, указанную в левой части исходного равенства. Получим x^2, ведь эта степень равна 2.

$$\left(x^{\log_x(2x-1)}\right)^{\log_{2x-1}(3x-2)\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2025x-2024}(2026x-2025)}=x^2$$

$$\left((2x-1)^{\log_{2x-1}(3x-2)}\right)^{\log_{3x-2}(4x-3)\ldots\log_{2025x-2024}(2026x-2025)}=x^2$$

$$\left((3x-2)^{\log_{3x-2}(4x-3)}\right)^{\log_{4x-3}(5x-4)\ldots\log_{2025x-2024}(2026x-2025)}=x^2$$

$$\ldots$$

$$2026x-2025=x^2$$

$$x^2-2026x+2025=0$$

$$x=1 \text{ или } x=2025$$

Однако первый корень не входит в область допустимых значений.

Ответ: 2025.

3. [10 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+7x+4}-2}\leq\frac{1}{3x^2+7x}.$$

Решение.

Введём замену $a=\sqrt{3x^2+7x+4}$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{1}{a-2}\leq\frac{1}{a^2-4},$$

с ОДЗ $a\geq 0$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a^2-4}\le 0.$$

$$\frac{a+2-1}{a^2-4}\le 0.$$

$$\frac{a+1}{(a+2)(a-2)}\le 0.$$

С учётом ОДЗ методом интервалов получаем: $a\in[0,2)$. Следовательно,

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+7x+4}\ge 0,\\ \sqrt{3x^2+7x+4}<2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2+7x+4\ge 0,\\ 3x^2+7x+4<4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3(x+1)\left(x+\frac{4}{3}\right)\ge 0,\\ 3x\left(x+\frac{7}{3}\right)<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[-1,+\infty),\\ x\in\left(-\frac{7}{3},0\right).\end{cases}$$

Таким образом, $x\in\left(-\frac{7}{3},-\frac{4}{3}\right]\cup[-1,0)$.

Ответ: $\left(-\frac{7}{3},-\frac{4}{3}\right]\cup[-1,0)$.

Критерии оценивания:

Введена замена $a=\sqrt{3x^2+7x+4}$, получен корректный вид выражения для данной замены – 1 балл.

При решении не учтено ОДЗ – не более 5 баллов.

4. [10 баллов] Решите уравнение

$$\sin^2 x(1+\sin^2 x+\sin^4 x+\cdots+\sin^{2n} x+\cdots)+$$
$$+\cos^2 x(1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots)=2.$$

Решение.

Заметим, что если $|\sin x|=1$ или $|\cos x|=1$, то одна из сумм в левой части равенства будет бесконечно большой величиной. Значит, $|\sin x|<1$ и $|\cos x|<1$. Тогда выражения в скобках – суммы бесконечного числа слагаемых убывающих геометрических прогрессий. Эти суммы равны $\frac{1}{1-\sin^2 x}$ и $\frac{1}{1-\cos^2 x}$.

$$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=2$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=2$$

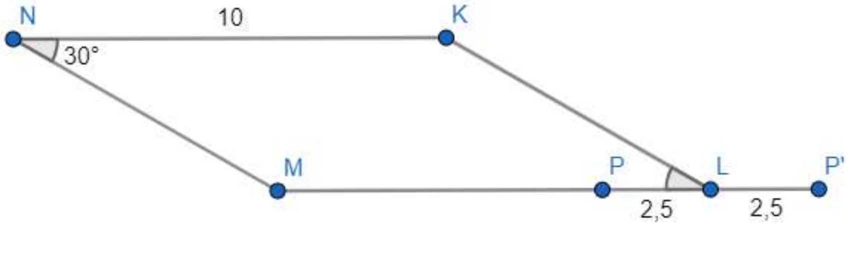
$$\operatorname{tg} x=\pm 1$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$.

5. [15 баллов] $MNKL$ – параллелограмм с острым углом $\angle MNK=30^0$. Длина стороны ML равна 10. Окружность проходит через вершину M и касается прямой KL в точке Q. Точка P пересечения окружности с прямой ML расположена на расстоянии 2,5 от точки L.

а) Докажите, что $QP:PL=MQ:QL$.
б) Найдите радиус этой окружности.



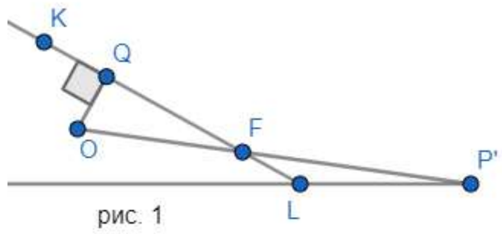
Решение.

Пусть точка P лежит на продолжении стороны ML за точку L (на рисунке P').

O – центр окружности; $d(O;KL)$ – расстояние от точки O до прямой KL.

По условию, $OM=d(O;KL)=OP'=R$ – радиус окружности.

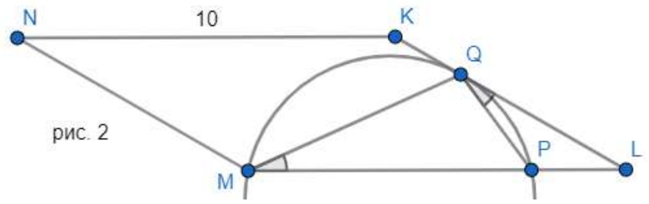
Пусть $OP' \cap KL = F$, тогда $OF < OP' = R$.

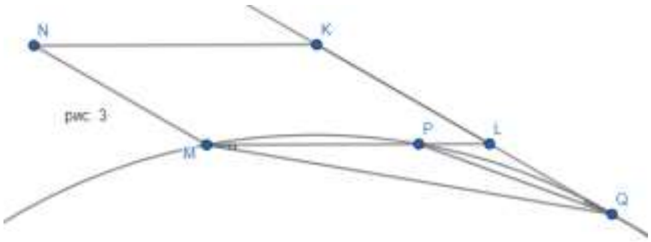


С другой стороны: $R = OQ < OF < OP' = R$.

$\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow$ точка P принадлежит отрезку ML.





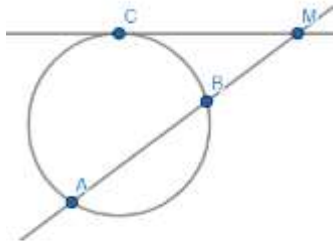
а) Докажите, что $QP : PL = MQ : QL$.

Рассмотрим 2 случая: 1) Q принадлежит отрезку KL; 2) Q лежит на продолжении KL за точку L.

В обоих случаях $\angle QMP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QP}$ (вписанный угол), $\angle LQP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QP}$ (угол между касательной и хордой) $\Rightarrow \angle QMP = \angle LQP$.

Тогда $\Delta QML \sim \Delta PQL$ по двум углам $\Rightarrow QP : PL = MQ : QL$.

б) Используем свойство:



$$MC^2 = AM \cdot BM$$

В обоих случаях: $QL^2 = LP \cdot LM$.

$ML = 10$ (по условию)

$$MP = 10 - 2{,}5 = 7{,}5$$

$$QL^2 = 2{,}5 \cdot 10 = 25 \Rightarrow QL = 5$$

В обоих случаях:

$$2R = \frac{QP}{\sin QMP}$$

1 случай) Найдём QM по теореме косинусов: $QM^2 = ML^2 + QL^2 - 2ML \cdot QL \cdot \cos 30°$

$$QM^2 = 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$QM^2 = 125 - 50\sqrt{3}$$

Из пункта а) $\frac{QP}{PL} = \frac{MQ}{QL} \Rightarrow QP = \frac{PL \cdot MQ}{QL}$.

По теореме синусов для ΔMQL:

$$\frac{QL}{\sin QMP} = \frac{MQ}{\sin 30°} \Rightarrow \sin QMP = \frac{QL \cdot \sin 30°}{MQ}$$

Тогда $2R = QP : \sin QMP = \frac{PL \cdot MQ}{QL} : \frac{QL \cdot \sin 30°}{MQ} = \frac{MQ^2 \cdot PL}{QL^2 \cdot \sin 30°} = \frac{(125 - 50\sqrt{3}) \cdot 2{,}5}{25 \cdot \frac{1}{2}}$

$$R = \frac{(125 - 50\sqrt{3}) \cdot 2{,}5}{25} = \frac{125 - 50\sqrt{3}}{10} = \frac{25 - 10\sqrt{3}}{2}$$

2 случай) Найдём QM по теореме косинусов: $QM^2 = ML^2 + QL^2 - 2ML \cdot QL \cdot \cos MLQ$

$$QM^2 = 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$QM^2 = 125 + 50\sqrt{3}$$

Аналогично случаю 1) $\sin QMP = \frac{QL \cdot \sin 150°}{MQ}$.

$$2R = \frac{MQ^2 \cdot PL}{QL^2 \cdot \sin 150°} = \frac{(125 + 50\sqrt{3}) \cdot 2{,}5}{25 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$R = \frac{25 + 10\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{25 \pm 10\sqrt{3}}{2}$.

Критерии оценивания:

верно выполнен пункт а) – 5 баллов;

если в пункте а) найден только один случай – 4 балла;

верно выполнен каждый из двух случаев в пункте б) – по 5 баллов за каждый случай.

6. [15 баллов] В четырехугольной пирамиде $SABCD$ все боковые ребра равны 10. В основании пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого образует со стороной AB угол, косинус которого равен $3/_5$. Угол $\angle BSD$ равен 60^0. Секущая пирамиду $SABCD$ плоскость α равноудалена от всех ее вершин.

а) Докажите, что плоскость α может пересекать ребра пирамиды только в их серединах.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

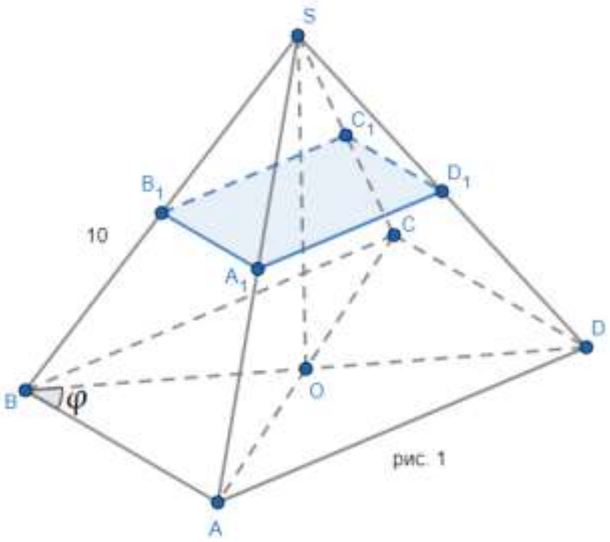


рис. 1

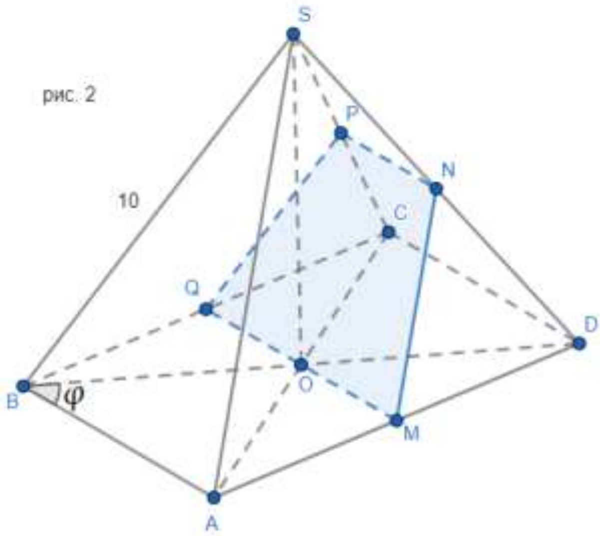


рис. 2

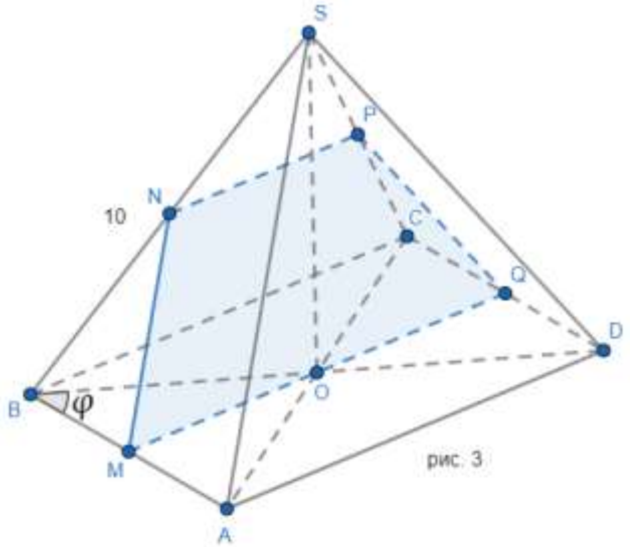


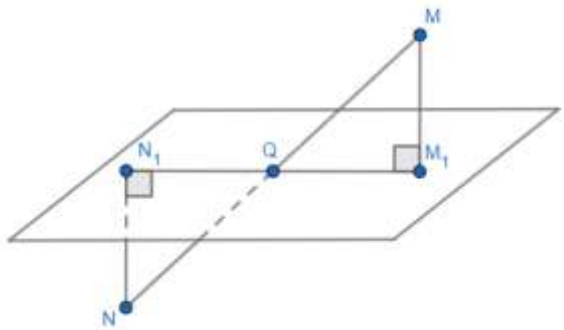
рис. 3

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\angle BSD = 60°$$
$$AS = BS = CS = DS = 10$$

Решение.

а) Пусть α – плоскость, которая пересекает отрезок MN, причём $d(M;\alpha) = d(N;\alpha)$.



Q – точка пересечения MN и α.

M_1 – проекция M на α;

N_1 – проекция N на α.

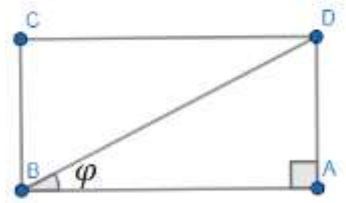
$$\begin{matrix} MM_1 \perp \alpha \\ NN_1 \perp \alpha \end{matrix} \Rightarrow MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow \text{точки } M, M_1, N, N_1 \text{ лежат в одной плоскости.}$$

$$\begin{cases} \text{По условию } MM_1 = NN_1; \\ \angle N_1QN = \angle M_1QM \end{cases} \Rightarrow \Delta QN_1N = \Delta QM_1M \text{ по катету и острому углу} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NQ = MQ \Rightarrow \text{плоскость пересекает отрезок в его середине.}$$

б) Так как боковые рёбра равны, то вершина проецируется в центр описанной около $ABCD$ окружности – точку O пересечения диагоналей.

ΔSBD – равносторонний ($SB = SD = 10;\ \angle BSD = 60° \Rightarrow \angle SBD = \angle SDB = 60°) \Rightarrow$ $BD = 10$.



$$\cos\varphi = \frac{AB}{BD};\ \frac{3}{5} = \frac{AB}{10}$$

$$AB = 6$$

$$AD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Заметим, что точки, лежащие в одном полупространстве относительно данной плоскости и расположенные на одном расстоянии от неё, образуют плоскость, параллельную данной.

Поэтому условию задачи удовлетворяют следующие три различных случая.

1 случай) (рисунок 1)

Плоскость α параллельна основанию, тогда α равноудалена от вершин A, B, C и D. Из пункта а) следует, что α пересекает боковые рёбра в их серединах. $A_1B_1C_1D_1$ – искомое сечение. В нём $A_1B_1 \parallel AB, A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = 3$; $B_1C_1 \parallel BC, B_1C_1 = \frac{1}{2}BC = 4$; $C_1D_1 \parallel CD, C_1D_1 = 3$; $A_1D_1 \parallel AD, A_1D_1 = 4$.

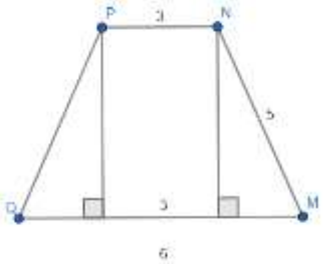
$\Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $\Rightarrow S_{\text{сеч}} = 3 \cdot 4 = 12$.

2 случай) (рисунок 2)

Плоскость α параллельна ASB, тогда α равноудалена от A, S, B.

$\alpha \parallel CD$, тогда α равноудалена от C и D. Из пункта а) следует, что α пересекает AD, CB, SD и SC в их серединах. Тогда PN – средняя линия ΔSCD; $PN = \frac{1}{2}CD = 3$; $QM = CD = 6$ (т.к. $QMDC$ – прямоугольник)

$PN \parallel CD; QM \parallel CD \Rightarrow QMNP$ – трапеция;



$$MN = \frac{1}{2}AS = 5 \text{ и } QP = \frac{1}{2}BS = 5$$

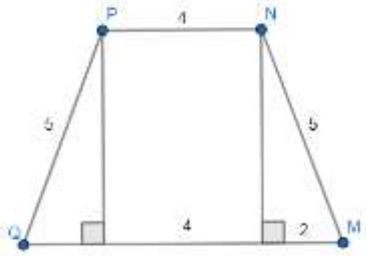
$$h_{\text{трап}} = \sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

Тогда $S_{\text{сеч}} = \frac{PN+QM}{2} \cdot h = \frac{6+3}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{91}$.

3 случай) (рисунок 3)

Аналогично случаю 2 в сечении – трапеция.

$MQ \parallel BC; MQ = BC = 8; PN \parallel BC; PN = \frac{1}{2}BC = 4$



$$h_{\text{трап}} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}.$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{4+8}{2} \cdot \sqrt{21} = 6\sqrt{21}.$$

Ответ: 12 или $\frac{9}{4}\sqrt{91}$ или $6\sqrt{21}$.

Критерии оценивания:

верно выполнен пункт а) – 5 баллов;

обосновано геометрическое место точек, равноудалённых от вершин пирамиды, – 1 балл;

верно рассмотрен каждый отдельный из возможных в пункте б) случаев – 3 балла за каждый случай.

7. [15 баллов] Кузнечик прыгает по числовому лучу вправо прыжками длины 2 или 3. Сколькими способами он может попасть из точки с координатой 2001 в точку с координатой 2026?

Решение:

Можно рассматривать прыжки с 1 точки до 26-й. Всего надо преодолеть 25 единичных отрезков. Найдем решения уравнения $2m+3n=25$, где m – количество прыжков длины 2, а n – длины 3. Перебрав все m от 0 до 11, получим такие наборы: (2,7), (5,5), (8,3), (11,1). В каждом из этих случаев последовательность прыжков указанной длины может меняться. В первом случае таких перестановок $C_9^2 = 36$, во втором $C_{10}^5 = 252$, в третьем $C_{11}^3 = 165$, в четвертом $C_{12}^1 = 12$. Всего 465.

Ответ: 465.

8. [15 баллов] Решите неравенство

$$\log_{|2x-1|}\frac{1}{x^2-x+\frac{3}{2}} > \log_{|2x-1|}\frac{2}{3} - 1.$$

Решение.

Преобразуем неравенство

$$\log_{|2x-1|}\frac{4}{4x^2-4x+6} + \log_{|2x-1|}\frac{3}{2} + 1 > 0.$$

$$\log_{|2x-1|}\frac{4}{(2x-1)^2+5} + \log_{|2x-1|}\frac{3}{2} + 1 > 0.$$

Введём замену $a = |2x-1|$:

$$\log_a\frac{4}{a^2+5} + \log_a\frac{3}{2} + 1 > 0.$$

$$\log_a\frac{4}{a^2+5} + \log_a\frac{3}{2}a > 0.$$

$$\log_a\frac{6a}{a^2+5} > 0.$$

Тогда с учётом ОДЗ:

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ a > 0, \\ \dfrac{6a}{a^2+5} > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 1, \\ \dfrac{6a}{a^2+5} < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ \dfrac{6a}{a^2+5} > 1. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ a > 0, \\ 6a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1 < 0, \\ 6a-\left(a^2+5\right) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 > 0, \\ 6a-\left(a^2+5\right) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ a > 0, \\ (a-1)\left(6a-\left(a^2+5\right)\right) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ a > 0, \\ (a-1)^2(a-5) < 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем

$$a \in (0,1) \cup (1,5).$$

Получаем

$$\begin{cases} |2x-1| \notin \{0,1\}, \\ |2x-1| < 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1 \notin \{-1,0,1\}, \\ -5 < 2x-1 < 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}, \\ -2 < x < 3. \end{cases}$$

$$x \in (-2, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3).$$

Ответ: $(-2, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3)$.

Критерии оценивания:

Введена замена $a = |2x - 1|$, получен корректный вид выражения для данной замены – 1 балл.

Получены все решения для a – 7 баллов.