Открытая многопрофильная олимпиада

Кубанского государственного университета

для школьников по ***математике***

2025/2026 учебный год

Задания заключительного этапа

1. [15 баллов] Решите неравенство:

$$\frac{\left(3-\log_2\left(2\sin\frac{\pi x}{2}+6\right)\right)\cdot\left(2-|\cos x|-\sqrt{\log_{|x|+1}(x^2+2|x|+1)-1}\right)}{(\log_3 x)^2-\log_3(x^7)+10}\leq 0.$$

2. [15 баллов] Найдите минимальное значение выражения

$$y=\left|36^k-5^n\right|,$$

где n и k – натуральные числа.

3. [15 баллов] На прямой линии отмечены $n \geq 10$ точек с координатами 1, 2, …, n. Два игрока по очереди соединяют две выбираемые на каждом ходу точки отрезком. Запрещается проводить отрезок, который имеет общую внутреннюю точку с любым из уже проведённых отрезков (касание в концах разрешено) и длина которого (абсолютное значение разности координат концов отрезка) превышает $n/5$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для какого игрока существует выигрышная стратегия?

4. [15 баллов] Петя записал на доске первые 35 натуральных чисел в порядке возрастания. Он может менять местами любые два соседние числа за 1 балл, а любые два числа, отличающиеся на 5, за 0 баллов (да, совершенно бесплатно). За какое наименьшее число баллов ему удастся расставить числа в обратном порядке?

5. [20 баллов] Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 2. Окружность проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, а ее диаметр равен $\sqrt{29}$. Длина отрезка касательной, проведенной из вершины C к этой окружности, равна 5.

а) Доказать, что прямая BC пересекает данную в условии окружность в двух точках.

б) Найти длину стороны BC прямоугольника $ABCD$.

6. [20 баллов] Дана четырехугольная пирамида $SABCD$. Ее основание – трапеция, у которой $AD||BC$. Точка C - основание высоты пирамиды. Точка K равноудалена от точек B и C и расположена в середине отрезка AD. Плоскость α проходит через середину отрезка SC параллельно плоскости ABC.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями SBK и α, если дополнительно известно, что $BC = 4\sqrt{2}$ и $SC = 2\sqrt{10}$, а на прямой BK можно расположить точку L так, что будут выполняться условия: $\angle BLC = \angle SLC$ и $BL: LK = 3: 1$.